“分数”の認識形式的意味についての考察
—“分数”教材研究の一局面として—

宮　下　英　明

はじめに

“分数”とは何か。“分数”の教材研究の出発点は，この問題意識である。

教授／学習の対象として一旦措定された分数は，あくまでも分数として教授／学習されるべきである。どのような経路を辿るにせよ，最終的に分数が分数として教授／学習されていること。このことに対して異論はなかろう。勿論，“分数が分数として教授／学習される”の意味は，知識[註1]としての分数がその全き姿で教授／学習されること，別モノとして教授／学習されることがない、ということである。

“分数”は，算数科教材研究論においてこれまで最も数多く議論されているテーマの一つであり，またその意味で言い古されたテーマでもある。しかし，言い古されてはいても，言い尽くされたり，また完成されたりもしていないテーマであることは確かである。何故か。

今日，分数はどのような概念として指導されているか。それは，端的に，“量”として指導される。即ち，(下位)単位量の意味で捉えられた単位分数の整数倍として指導され，これの延長として，実質＜量直線＞としての数直線の上の一点として整理される。しかしこのような指導は，筋を違えている。実際，分数概念の第一義は（“整数比”の意味に準ずるところの）“割合”なのだから。そして知識としての分数の意義からいって，特に教育的配慮からいって，“割合”は“量”の中に解消されるべきではないのだから[註2]。

さて，このような現状は，逆に，言い古されたテーマとはいえ“分数”がどのような知識であるかを問うことになお今日的な意味のあることを，筆者に強く意識させる。本論文は，このような認識に立って，分数の知識＝認識形式としての意味を改めて明らかにしてみようとするものである。

（註1）知識とは，宙に浮いてあるものではなく，何より先ず，所有されている知識である。そしてそれは，一定の形式をもった行為（認識も“行為”である）として発現するところのものである。あるいは，行為の形式の意識対象化から反照的に措定されるところのものである。つまり，行為の形式から溯行して到達する概念，それが＜知識＞の概念というわけだ。したがって，それは，行為の形式を保証しているもの，行為の形式の根拠となっているもの，という意味の概念である。ここでは知識をこのように理解する。

（註2）分数を原理的に“量”と捉えることも，教育上の方便として“量”として示すことも，ともに誤りである，前者は原理的に誤っているということにおいて，そして後者は，教育的方便になっていない——実際，分数は別モノとして教授されるのだから——ものを教育的方便と思い込むことにおいて。

I　分数の概念

1—1　分数の意味

数学教育の標準的なテキストには，分数の意

味として，“割合分数”，“のつきの分数”，“操作分数”，“分割分数”，“量分数”，“整数／整数としての分数”（／は“割る（÷）”と読む），“有理数としての分数”等が，並記されている。しかし，分数の意味として本質的なのは“割合”である。実際，以下明らかにしていくが，他のものはこの意味の色々な表出の仕方として説明できるのである。

ここで，“割合”であるが，それは“量 a の基準量 u に対する割合”という言い回しの中で意味をもつコトバである。そしてこの場合，“割合”は，数学的には u に作用して u を a にするような＜倍＞というように形式化される。

有理数の出処は，この＜(量の)倍＞の概念である。[註1]しかし，有理数に対して一般に持たれているイメージは，＜倍＞とは違うであろう。実際，有理数にはそれ自体として自立しているイメージがあり，そして或る意味において確かに自立しているのである。どのような意味においてか。それは＜倍＞の構造という意味においてである。量から＜倍＞の構造が捉えられそしてこの構造がそれ自体として対象化される。この構造の身分は＜形式＞であり，それは最早量の意味を必要としない。そしてまた，＜(有理)数＞がその出処の＜量＞と本質的な意味で向き合わされることになるのは，数学科の中では実際問題として独り算数科においてなのである。算数科のこの意義は，正しく認識，評価されなければならない。

さて“分数”を取り上げることは，＜有理数＞概念の契機としての＜(量の)倍＞の概念に直接向き合うことに等しい。分数を整数／整数として考えることにしても，＜倍＞の概念を回避することはできない。整数／整数においても結局＜倍＞概念が顕在化することになるのである（§2—2）。

＜倍＞の形式は，端的に順序対としての整数比である。実際，量 a が量 b（基準）の何倍であるかを，われわれは，a と b を両者の公約量で分節化したとき両者の分節の個数がそれぞれいくつかというように表現する。よって，＜倍＞を意味とする有理数[註2]の表現形態は必然的に“分数”となる。

したがって，結論を予め述べておくならばそれはつぎのようになる。即ち，“分数”の意味は，端的に＜倍＞であり，ここで＜倍＞とは，二量（一方が基準量）を両者の公約量で分節化したときの状態へと還元される概念である，と。以下，このことを詳らかにしていくとしよう。

（註1）ここで問題にする“量”（カテゴリー）とは，＜比較＞の行為を保証する順序構造の他に，“倍”と“加法”の演算を保証する代数的構造（＝有理数体Q上の1次元線型空間の構造）を備えているもののことである。

（註2）自然数は，意味上，この有理数とは別のものである。自然数においては，“はじめ”と“そのつぎ”が基本概念（意味）になる。実際，“1”から始まって，“1のつぎ”として“2”，“2のつぎ”として“3”，“3のつぎ”として“4”，………が定められていく。そしてこれを認識形式として適用するとき，事象の系列（sequence）化と事物の計数（counting）という意味的には別の二つのことが実行できることになる。

因に，＜対等＞——“1対1対応がつく”——という概念で集合のカテゴリーを類別したときの各クラスにあてられた名称として，あるいはクラスそれ自体として“1”，“2”，“3”，……を理解しようとする“集合数”のアイデアは，意味的には明らかに詭弁である。（しかるに，今日主流の算数教育論では，“1対1対応”から自然数に入っていくというやり方が，説かれている。）実際，例えば“三つの要素からなる集合”には，正しく“2”のつぎにくるものとしての“3”が基数として与えられるのであって，その他ではない。“三つの要素からなる集合”は“二つの要素からなる集合”より一つだけ要素の多い集合として意味づけられるのみである。したがって，基数“3”の意味は“2のつぎ”

としての"3"でなければならないのである。

参考：ユークリッドの互除法

量を割合的に表現するためには，それと基準量の公約量を求めることになる。そして，この公約量を求めるアルゴリズムとしてユークリッドの互除法がある。それは，同一のカテゴリーの二量 $a>b>0$ に対する

$$\begin{aligned} a &= b\odot\alpha_1 \oplus r_1 && (0\leqq r_1<b) \\ b &= r_1\odot\alpha_2 \oplus r_2 && (0\leqq r_2<r_1) \\ r_1 &= r_2\odot\alpha_3 \oplus r_3 && (0\leqq r_3<r_2) \\ &\vdots && \vdots \end{aligned}$$

（α_i は整数；$\oplus$ は量の加法で，$\odot$ は量に対する整数倍の作用）(註) という互除操作であるが，この操作で或る n に対し $r_{n-1}=r_n\odot\alpha_{n+1}$ となったとき，r_n は実は a と b の最大公約量になっているのである。しかもこのとき，a と b の整数比 $(a/r_n):(b/r_n)$（当然既約になる）も同時に得られることになって，実際それは

$$\alpha_{n+1} \longrightarrow \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

$$\longrightarrow \alpha_n+\frac{1}{\alpha_{n+1}}=\frac{\beta_n}{\gamma_n} \longrightarrow \frac{\gamma_n}{\beta_n}$$

$$\longrightarrow \alpha_{n-1}+\frac{\gamma_n}{\beta_n}=\frac{\beta_{n-1}}{\gamma_{n-1}} \longrightarrow \frac{\gamma_{n-1}}{\beta_{n-1}}$$

$$\longrightarrow \cdots\cdots\cdots$$

$$\longrightarrow \alpha_1+\frac{\gamma_2}{\beta_2}=\frac{\beta_1}{\gamma_1}$$

と計算したときの $\beta_1:\gamma_1$ である（〔4〕参照)。

（註）以下，$\oplus$，$\odot$ の記号をこの意味で用いていく。なお，§2－1，(1)で改めてこれらを導入する。

1－2　分数と小数

分数概念の意義を考えるためには，小数概念とそれを比べ合わせてみるとよい。数学的には，小数⊏分数である。但し，小数はすべて分数表現が出来るという意味合いにおいて。しかし，認識の形式（"見方・考え方"）ということでは，両者ははっきり別のものである。即ち，量表現に対する別々の方法論が，分数概念と小数概念のそれぞれの契機になっているのである。

分数概念のもとになる方法論とは，表現が問題になっている量 a を，（相対的に）親近性のある一つの量 b に対しての割合という形で表現しようとするものである。このとき，量 b の身分に対して与えられる名称が，"(割合における）基準量"である。この"割合"表現は，a と b の公約量 c を求めるという手続きを経てつぎのように為される。即ち，a と b が c のそれぞれ m 回および n 回の累加になるとき"a の b に対する割合は n に対する m"，と。そして，これを簡潔にした言い方として"a は b の $\frac{m}{n}$"が出てくる。

つぎに，小数概念のもとになっている量表現の方法論であるが，これは，簡単に言うと，表現が問題になっている量 a の上に"計測単位"の意味の"単位量"をいくつ並べていけるかを見るというものである。このとき，余りがでるときのことを考慮して，下位単位量も用意するが，その構成は，特定倍したら一段上位の単位量になるという具合に，システマティックになされる。こうして下位単位量間に位階（ヒエラルキー）が形成されるが，さらにここから，量の"位取り表現"が可能になってくる。それは，単位量のヒエラルキー $u_0>u_1>u_2>\cdots\cdots$ に対し，量 a の上に u_0 を k_0 個までおくことが出来，このときの余りの上に u_1 を k_1 個までおくことが出来，更にこのときの余りの上に u_2 を k_2 個までおくことが出来，…… というときに a を $k_0\,k_1\,k_2\cdots\cdots$ と表現するものである。そして"小数"とは，実質的に，量のこのような"位取り表現"のことなのである。（小数点があるとか何進構造であるとかは，二次的なことがらである。）

なお，量表現に対する第一の方法論では"基準量"と"公約量"が基本概念であり，これに対し第二の方法論では"計測単位＝単位量"が基本概念になっている。

1－3　単位量未満の量の表現における分数

分数の取り上げ方として今日特徴的なのは，単位量（計測単位）未満の量（“はんぱ”，“はした”）の表現という文脈において分数を取り上げるというものである。しかし，分数のこのような扱いとして現行の教科書に現われているものには，実は問題がある。

現に，単位量（計測単位）未満の量の分数による＜表現＞は，“単位分数”に対応する量を新たに計測単位として用いた＜計測＞という意味合いで，一般に受け取られているのではないか。実際，“$\frac{1}{3}m$(メートル)を単位にして測ったときそれが二つ分あるから$\frac{2}{3}m$”といった言い回しが普通になされている。しかし，この場面で顕在化する“単位”の概念は，“分節単位”であって“計測単位”ではないのである。

量の計測の基本原理は，あくまでも，単位量（計測単位）のいくつ分という形で量を表現することである。そこで，単位量（計測単位）未満の量には下位単位量で応じ，やはりこれのいくつ分という形で量表現していく，よって，計測値が“小数”の形態をとっているときにも，それの身分は＜整数＞なのである。例えば$\frac{2}{3}m$は，計測という文脈では，$1m$の$\frac{2}{3}$倍の長さという意味ではなく，$1m$の下位単位量$\frac{1}{3}m$の二つ分（２倍）の長さの意味である。従って計測値は単位量$\frac{1}{3}m$に応ずるところの２であって，単位量$1m$に応ずる$\frac{2}{3}$ではない。

ところで，“単位量（計測単位）$\frac{1}{3}m$”という概念は成立するのだろうか。仮に“$\frac{1}{3}m$”が単位量として把えられることになるとすれば，それは基本的に二つの場合においてである。一つは，$1m$を基本単位量とした下位単位量のヒエラルキーの中にそれが位置づけられている場合で，もう一つは，$\frac{1}{k}m$（$k=2$，3，……）の各量が，並列的に$1m$の下位単位量として規定されている場合である。しかし，$1m$が基本単位量の下位単位量のヒエラルキーとしてわれわれのもっているものは$1m$，$\frac{1}{10}m$，$\frac{1}{100}m$，……であるから，現実問題として前者はない。後者はどうであろうか。このときには，$1m$，$\frac{1}{2}m$，$\frac{1}{3}m$，……の長さを言わば鍵束のように持っていて長さの計測のときにその中の適当なものを単位量として選んで用いるというのが，計測の状況としてイメージされるものになる。しかし実際のところこのような形態のものをわれわれはモノサシとはしていない。したがって，後者も現実的ではないわけである。

このように言うと，“単位量（計測単位）$\frac{1}{3}m$”は意識の問題なのだという反論が起こるかも知れない。即ち，“単位量（計測単位）”として意識された“$\frac{1}{3}m$”は単位量（計測単位）なのだと。しかし，そうではないのだ。概念の身分は，意識(主観)の問題ではなく，実際の意味＝機能の問題である。そしてこの意味で“単位量（計測単位）$\frac{1}{3}m$”の概念は成立しないというのが，ここでの筆者の主張なのである。

量の計測は量表現であるが，量の計測が量表現のすべてなのではない。実際，比喩を用いたり形容詞を用いたりの非数学的な表現は日常的なものである。そして，数学的な量表現も，計測に限るのではない。即ち，量の割合的表現がある。そして先の量表現“$\frac{2}{3}m$”は，量の割合的表現なのである。何故か。それは“$\frac{2}{3}m$”という表現が現実にどのようにして得られるかを見ていけばわかる。

長さaに対する“$\frac{2}{3}m$”という表現は，つぎのようにして得られた（§1－2）。即ち，aと$1m$（＝基準量）との＜公約量＞bを求め，bによってaと$1m$を分節化する。そしてaに二個，$1m$に三個の分節ができるとき，aには“$1m$の$\frac{2}{3}$”（“$1m$が３に対し２”）の意味での“$\frac{2}{3}m$”の表現が与えられる。このときの“$\frac{2}{3}m$”に応ずる“$\frac{1}{3}m$”の身分は，＜公約量＞bの表現である。しかしこの場合，公約量bに表現“$\frac{1}{3}m$”を与えるというワン・ステップを間にはさむ必要はない。それどころか，bに何がしかの表現を与えるということ自体，余分なことなのだ。抑々，bに対する“$\frac{1}{3}m$”という表現は，それが$1m$のどのような約量であったのかという結果的見返しから出てくるのである。――そしてこのとき“$\frac{1}{3}m$”に対しては

"1 mを3等分した一つ" として捉えられたことによる "$\frac{1}{3}m$" と，"1 mの$\frac{1}{3}$" という割合の形式で捉えられたことによる "$\frac{1}{3}m$" との，二つの受け取り方が出てくる。しかし，いずれにせよ，先の "$\frac{2}{3}m$" の表現は "$\frac{1}{3}m$" を中継したものではない。"$\frac{2}{3}m$" の意味は，"$\frac{1}{3}m$ の二つ分(2倍)" ($\frac{1}{3}m\odot 2$)ではなく，あくまでも "1 mの$\frac{2}{3}$(倍)" (1 $m\odot\frac{2}{3}$) なのである。

これに対し，"$\frac{1}{3}m$" が＜単位量（計測単位)＞の身分である場合にはどうなるか。$\frac{1}{3}m$ が a の上に並べて置かれていくわけである。そして a の上に$\frac{1}{3}m$が丁度二つのるということで a に "$\frac{2}{3}m$" という表現が与えられる。即ち，未知の a に対し，既知（手持ち）の "$\frac{1}{3}m$"で立ち向かうというのがこの場合の図式で，a の上に$\frac{1}{3}m$が丁度整数個のるかどうかもやってみなければ分らないこととしてある。$\frac{1}{3}m$を＜単位量(計測単位)＞の身分で用いるとはこういうことである。そしてそれは，a と1 mの＜公約量＞として a の約量であることがわかっている$\frac{1}{3}m$を改めて（余分の作業として）a の上に並べてみるということとは全然違うのである。

さて，以上，分数を単位量（計測単位）未満の量の表現という文脈で取り上げるときの現行のやり方には問題があると断ずることから始まって，その理由を論じてきた。本節を閉じるにあたり，改めてそれを要約して述べておこう。

現行のやり方の問題点は，単位量(計測単位)未満の量("はした"，"はんぱ")の表現を＜計測＞という文脈で捉え，＜単位量(計測単位)＞の概念を主役においたことである。しかし，＜単位量(計測単位)＞の概念はここでは成立しない。実際，＜(量の) 割合（的把握)＞と＜公約量(分節単位)＞がそれぞれ＜計測＞と＜単位量(計測単位)＞に取って替わらねばならないのである。

1—4　"のつきの分数" と "操作分数"

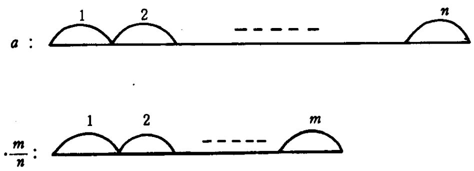
分数の＜割合＞としての意味は，"のつきの分数" として言語的に現象することになる。

"のつきの分数" とは，"(量) a の$\frac{m}{n}$" という言い回しの中の分数 "$\frac{m}{n}$" のことである。但し，"のつき" ということは "の" を切り離せないということであって，"$\frac{m}{n}$" 自体に意味を持たせることはできない。つまり，"a の$\frac{m}{n}$" から単独にとり出された "$\frac{m}{n}$" には対象としての資格がない。

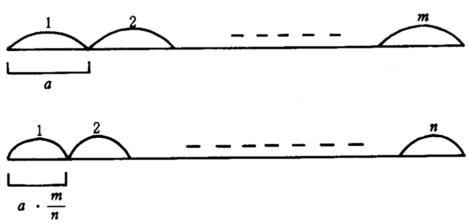
"のつきの分数" を数学的に定式化するとすれば，それは量に対する＜作用＞である。即ち，一つの量カテゴリーQに対し，$a \longmapsto$ (a の$\frac{m}{n}$) ($a\in$ Q) で定義される関数 $\frac{m}{n}$: Q $\longrightarrow$ Q が，"のつきの分数"としての$\frac{m}{n}$の数学的身分であって，さらにこれを各 $a\in$ Qに対する作用 $a\odot\frac{m}{n}$と読み直す。

さて，関数$\frac{m}{n}$：$a\longmapsto a\odot\frac{m}{n}$の意味は，集合 $\{(a,\ a\odot\frac{m}{n}) \mid a\in Q\}$ であって，それ自体は，$a\odot\frac{m}{n}$を a からどのようにして得るか（構成するか）を述べるものではない。ここでこの関数を因果律的に読もうとすれば，つまり "a の$\frac{m}{n}$" という表現に対し，$a\odot\frac{m}{n}$がアウト・プットされてくる仕組み――結局は，$a\odot\frac{m}{n}$の構成の仕方――の意味も含ませようとすれば，所謂 "操作分数" の概念が出てくる。a に対する$\frac{m}{n}$の＜作用＞$a\odot\frac{m}{n}$を＜操作＞の意味合いで読むわけである。

"a の$\frac{m}{n}$" は≪n 倍が a になる量の m 倍≫の意味であるから，≪a を "n 等分" してそこからm個とったときの量≫がこれの＜操作＞的な読み方になる。図式でいうと，



である。なおこの読み方は，≪a をm倍して，それをn等分したときの一つ分≫という読み方と同値になる。後者は，図式では，



である。しかし第二の読み方に応ずる“aの$\frac{m}{n}$”の読みは≪n倍がaのm倍になる量≫でなければならず，こちらの方は“aの$\frac{m}{n}$”の本来の読みとは言えない(§2—2)。

1—5　量分数

“量分数”として通常イメージされているものは“単位つきの分数”である。しかし，“量分数”は，“単位つきの分数”とは別のものとして考えられるべきである。

先ず，単位つきの分数は割合分数に他ならない。実際，それは——例えば$\frac{2}{3}m$(メートル)が“1mの$\frac{2}{3}$”の量のことであるように——単位量つきの分数であって，“のつきの分数”と同じ（したがって割合分数）なのである。

これに対し，“量分数”はそれ自体として量であるような分数のことである(べきである)。もう少し丁寧に言うと，それ自体として量であるような数で且つ“分数”の形態で表現されているもののことである。ところで，量としての数とは何か。

有理数の乗法$\alpha\times\beta$を，αに“倍”βを作用させる外算法と捉え直すことにすると，加法とこの外算法が定める代数的構造と数の大小関係の定める順序構造を以て，有理数の集合Qは量の構造を有することになる。(註1)この意味でQを量と見なすとき，Qはさらに，（量の構造の表現ということで)“普遍量”——個々の具体的な量に均しく通用するモデル(註2)——としての意味をもつことになる。こうして，数はそれ自体一個の量と見れるし，量のモデルとも見れる。“量としての数”とはこのような意味のものである。

さて，“量分数”は実際にどのような貌で現われてくるのか。それが出てくる典型的な文脈は，≪1に対する$\frac{m}{n}$≫である。

＜割合＞としての$\frac{m}{n}$に対しては，≪nに対するm≫の他に≪1に対する$\frac{m}{n}$≫という受取り方があり得る。もっと明確に言うと，同一のカテゴリーの量a，bに関しての“aはbの$\frac{m}{n}$”という表現に対して，≪bがnに対しaがm≫の他に≪bが1に対しaが$\frac{m}{n}$≫という受取り方もあり得る。前者は，a，bの公約量をとってそれで双方を分節化するという手続きを直接背景に持つところの＜割合＞の見方であり，“のつきの分数”の読み方である。これに対し後者は，＜量としての数＞を経由した＜割合＞的見方ということになる。

即ち，≪1に対する$\frac{m}{n}$≫における数“1”と“$\frac{m}{n}$”の身分は量であって，≪1に対する$\frac{m}{n}$≫とは量1に対する量$\frac{m}{n}$の割合，即ち量1に作用すると量$\frac{m}{n}$になるような倍の謂いである。そして“$\frac{m}{n}$”は同時にこの割合(倍)の表現としてもあるわけである。“$\frac{m}{n}$”に関する＜割合(倍)＞と＜量＞というこの二つの身分は区別して押えられていなければならない。そしてこのとき，≪bが1に対しaが$\frac{m}{n}$≫は，〔aのbに対する割合〕$=\frac{m}{n}$（割合）$=$〔$\frac{m}{n}$（量）の1（量）に対する割合〕の意味になる。(註3)

≪nに対するm≫ないし≪bがnに対しaがm≫の方も，m，nの身分を量として読むこともできるわけであるが，二つを＜分節＞の個数として読むのが直接的であり，本質的である。実際，m，nを量として読むとき，割合≪nに対するm≫は，量mとnが公約量1でそれぞれm個とn個に分節されることの意味であり，結局，分節の個数としてのm，nに戻ってくる。つまり，mとnを量と読むステップは余分なのである。

（註1）このことの詳しい内容については，〔3，Ch. 2〕を参照されたい。なお，“量”というコトバがこれまで三つの異なる意味において用いられていることに注意しよう。一つは（量）カテゴリーであり，一つは各（量）カテゴリーの要素であり，そして一つは（量の）構造である。

（註2）逆に，ここでは，有理数がモデルとなるような量のみを，“量”として考えているのである。

（註3）量a，bのカテゴリーQと量1，$\frac{m}{n}$のカテゴリー$\mathcal{N}$は異なるが，量＝構造として二つは同型である。そしてこの同型を介してQ

における＜割合＞と$\mathcal{N}$における＜割合＞を並置してその相等を論ずることができるようになる。(［3，Ch. 2］)

1－6　数直線と分数

分数“$\frac{m}{n}$”に対する≪1に対する$\frac{m}{n}$≫という受取り方，即ち同一のカテゴリーの量a，bに関しての“aはbの$\frac{m}{n}$”という表現に対する≪bが1に対しaが$\frac{m}{n}$≫という受取り方（§1―5）においては，“数直線”がイメージとして介在しているのが一般的である。即ち，数直線上の数値1の点とbを重ね合せるとき，数値$\frac{m}{n}$の点にaが重なるというイメージである。そしてこのイメージ＝解釈は一見何でもないようだ。しかし事実はそうではないのである。実際，数直線にどうして量を重ねることができるのだろうか。

“(有理)数”は，通常，この概念の本来の意味＝契機である量の関係概念の＜倍＞でイメージされるよりは，一個の独立した存在――特に一個の（しかし普遍的な）量――としてイメージされ易い。それは，われわれの心性にとっては＜関係＞よりも＜実体＞の方が受け入れ易いからである。そしてこのイメージの視覚化ないし視覚的補助になっているものが“数直線”である。したがってこの場合，数直線は＜量直線＞の資格でいる。

数直線――ここでは，話を簡単にするために正の有理数(半)直線に限定する――は，どのようにしてつくられるのか。先ず，半直線Lを考え，端点Oに数値0を与える。つぎに端点と異なるL上の一点Aを任意にとって固定し，数値1を与える。このとき，L上の任意の点Xには，線分OAの長さに対する線分OXの長さの＜割合＞が数値として与えられる。

つぎに，こうして作られた(数)直線はどのようにして＜量直線＞の身分をもつことになるのか。先ず，ここで関与してくる量(カテゴリー)は，加法(と倍)が定める構造に関して＜長さ＞と同型(註)な量である。このとき，量Qに対し，任意に$a \in Q$をとって固定し，数値1が与えられている(数)直線上の点Aをこれと同一視する。さらに，数値$\frac{m}{n}$が与えられる数直線上の点についてはこれをaの$\frac{m}{n}$倍の量$a \odot \frac{m}{n} \in Q$と同一視する。こうして量Qを表現する＜量直線＞が得られるのであるが，ここで特にQとして＜量としての数＞(§1―5)をとるとしよう。すると，数値$\frac{m}{n}$――これの身分は，長さの＜割合＞である――が与えられた（数）直線上の点には，$\frac{m}{n}$(量)＝［1(量）の$\frac{m}{n}$倍］が同一視されることになり，ここに＜量直線＞としての数直線が実現する。

さて，こうして構成された数直線では何が表現＝視覚化されているのか。二つが挙げられる。一つは，＜量としての数＞の各々の他に対する大きさの割合であり，もう一つは，＜量としての数＞の“大小”の（線型）順序 order である。前者は長さの割合として視覚化されるわけであり，後者は＜点＝数値＞の系列として視覚化されるわけである。

数直線が＜量としての数＞の“大小”の順序を表現することになる仕組みは，逆に，＜量としての数＞の“大小”の順序の意味を明らかにする。一方で，＜量としての数＞の大小関係≦は形式的に定義できる。即ち，$\frac{m}{n} \leqq \frac{m'}{n'}$の定義を，$\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$，$\frac{m'}{n'}=\frac{p'}{q}$，$p \leqq p'$なる整数$p$，$p'$，$q\,(q>0)$が存在することとすればよい。しかし，われわれの意識においては，＜量としての数＞の大小関係≦は，上に見た数直線の構成の場合のように，実際的な量の後に――即ち，実際的な量Qに関する大小関係と倍関係との対応を通して――出てくる。つまり，$\frac{m}{n} \leqq \frac{m'}{n'}$は，特定(任意)量$a \in Q$に対する$a \odot \frac{m}{n}$，$a \odot \frac{m'}{n'} \in Q$の大小関係$a \odot \frac{m}{n} \leqq a \odot \frac{m'}{n'}$の意味なのである。数直線の構成の場合には，＜長さ＞がQであった。実際，≪特定(任意)の長さaに対し$a \odot \frac{m}{n} \leqq a \odot \frac{m'}{n'}$≫であることと≪数値$\frac{m}{n}$が打たれる点の右側（右向きを正の方向として）に数値$\frac{m'}{n'}$が打たれる点が在る≫ということとが対応したのである。

このことの意義は，数学的な表現を用いるともっとはっきりしてくる。(以下の議論はラフ

・スケッチである。詳しくは，〔3〕を参照されたい。）量Qの構造（＝有理数体Q上の1次元線型空間）は，Qの倍変換（＝Qの自己準同型）全体の集合End（Q）に同種の構造を導く。このときのEnd（Q）の構造の中には，Qにおける“大小”の順序構造から導かれたものもあるわけで，それはつぎのように定義される順序関係≦による。即ち，f，$g\in$ End（Q）に対し$f\leqq g$の意味は，任意の$a\in$Q（あるいは特定の$a\in$Q，$a\neq 0$）に対し$a\odot f\leqq a\odot g$であること(ここで$f(a)$，$g(a)$を＜作用＞の形$a\odot f$，$a\odot g$に書き直した)。ところで実は，このEnd(Q)が＜量としての数＞なのである。実際，End(Q)の各元は，既に述べた＜分節の個数＞の概念に基づく＜割合＞の概念を用いれば，“分数$\frac{m}{n}$”の表現をもつことになる。そこで分数$\frac{m}{n}$全体の集合としての有理数QにEnd(Q)の構造をそっくりコピーする。このとき，＜量としての数＞が出来上がる。これは，量Qの個別性には依存せず，Qの構造のみに依存していることに注意しよう。＜量としての数＞が量の普遍モデルとしての身分をもつのは，このためである。

（註）二つの量（カテゴリー）Q，Q′が加法の定める構造に関して同型であるとは，Qの要素(量)とQ′の要素(量)の間の1対1対応fで，つぎの性質を満たすものが存在するということである。即ち，a，$b\in$Qの和がcであるとき，$f(a)$，$f(b)$の和が$f(c)$（言い換えると，$f(a\oplus b)=f(a)\oplus f(b)$）。ここで，$f$が自動的に倍の構造に関する同型になることに注意されたい。実際，$a\in$Qの$\frac{m}{n}$倍$a\odot\frac{m}{n}$が$b\in$Qであるとき，

$$\overbrace{a\oplus\cdots\cdots\cdots\oplus a}^{m\text{個}}=\overbrace{b\oplus\cdots\cdots\cdots\oplus b}^{n\text{個}}$$

であって，これから

$$\overbrace{f(a)\oplus\cdots\cdots\oplus f(a)}^{m\text{個}}=\overbrace{f(b)\oplus\cdots\cdots\oplus f(b)}^{n\text{個}},$$

さらに$f(a)\odot\frac{m}{n}=f(b)$。

Ⅱ　分数計算

2－1　基本概念――量計算

(1)　量の算法

量とは形式的には一つの構造であって，それは，倍関係と算法及び順序関係で規定される（〔3，Ch.1〕)。そして一つの内算法（加法）と一つの外算法（倍作用）が，量の算法として所与である。

いま，量（カテゴリー）Qを一つ固定し，量計算をQの上のものとして考えていくことにしよう。加法は“量aに量bを加える”と読まれる演算である。これを，数の加法と区別する意味で，$a\oplus b$と書くことにする。またこのときのaを“被加量”，bを“加量”と称しておく。

倍作用は，“量aに倍αを作用させる”と読まれる演算である。言い回しの簡単のために，これを“量aをα倍する”と言い表すとしよう。また，$a\odot\alpha$をこの演算の表記としよう。

$\mathcal{R}$(Q)を，Qの元に対する倍の全体とする。$\mathcal{R}$(Q)に対しては，加法がQの加法から自然に導かれ，また，倍の合成として乗法が定義される。そして，$\mathcal{R}$(Q)はこのふたつの内算法に関して体となる。さらに，Qが加法と$\mathcal{R}$(Q)の元による作用に関して体$\mathcal{R}$(Q)上の一次元線型空間となる。

＜数＞は$\mathcal{R}$(Q)の構造の抽象である。即ち，同型な量（カテゴリー）Q，Q′，Q″，……に対し$\mathcal{R}$(Q)，$\mathcal{R}$(Q′)，$\mathcal{R}$(Q″)……は同型であるから，これらに同型な対象$\mathcal{N}$を一つ固定すれば，Q，Q′，Q″，……のそれぞれに対する倍作用が$\mathcal{N}$の元による作用ということで一本化できる。そしてこのように導入された対象$\mathcal{N}$こそが，＜数＞に他ならない。

算法$\oplus$，$\odot$の各々は，二つの逆算法を導く。即ち，$\oplus$からは，$x\oplus a=b$となる量xを求める算法$\ominus_1$と$a\oplus x=b$なる量xを求める算法$\ominus_2$が導かれ，$\odot$からは，$x\odot\alpha=a$となる量xを求める算法$\oslash_1$と，$a\odot x=b$となる倍xを求める算法$\oslash_2$が導かれる。

(2) 量の積

二つの量(カテゴリー) Q, Q′に対しては, Qの元とQ′の元の“積”と呼ばれる関数：$(a, a') \longmapsto a \otimes a'$ ($a \in$ Q, $a' \in$ Q′, $a \otimes a' \in$ Q⊗Q′)を考えることができる。ここに, $a \otimes a'$, Q⊗Q′は数学的概念の“テンソル積”である。

X, Y, Zが同一の体K上の一次元線型空間であるときには, 非退化な双線型写像 f: X×Y⟶Zが定義されさえすれば, ZがXとYのテンソル積X⊗Yとして特徴づけることができたということを想起しよう。実際, $x \otimes y \longmapsto$ f(x, y) ($x \in$ X, $y \in$ Y) が, このときのX⊗YとZをつなぐ同型であった。

そして他方量 (カテゴリー) は体$\mathscr{N}$上の一次元線型空間であった。

したがって, 量の“(テンソル)積”の概念の射程は広い。例えば, 量Qの元aに対する$\mathscr{N}$の元αの作用$a \odot \alpha$も, $\mathscr{N}$をそれ自身の上の一次元線型空間=量と見なす((1))ことで, (テンソル) 積$a \otimes \alpha$として解釈できる。より一般的に(註1), 量Q, Q′に対し, Q″=Hom (Q, Q′) は$\mathscr{N}$上の一次元線型空間=量と見なせるが, このとき$f(a) \in$ Q′は (テンソル) 積$a \otimes f$である。なお, 量の“(テンソル)積”の解釈として典型的なものは, “面積”ないし“体積”である ([1])。

算法⊗(註2)からは二つの逆算法が導かれる。$x \otimes a = b$となるxを求める逆算法$\oslash_{\mathrm{i}}$と, $a \otimes x = b$となるxを求める逆算法$\oslash_{\mathrm{ii}}$がそれである。

(註1) 実際, $\mathscr{N} = \mathscr{R}$(Q)=Hom (Q, Q) である。

(註2) ⊗一般は, 一つの量カテゴリーにおける内算法や外算法ではない。

(3) 量の数値計算

量の計算とは, 算法⊕, ⊙, ⊗およびこれらそれぞれの逆算法の組み合わせである。(但し, ⊕, ⊙, ⊗はそれ自体は単に<形式>であって, 現実の量を考えることにはこの形式に意味を与えることが含まれている。) そしてこれは, 量単位の計算と数 (=$\mathscr{N}$の元) の計算の二つの局面に分けるという方法をとることで, 字義通り“量計算”と呼び得るものになる。実際, ナマの量から脱していない“量計算”というものは, 量をそこに考えている対象の直接的操作 (具体的ないし観念的) と事実上変わるところがないからである。

量計算が量単位計算と数計算の二つの局面に分解するのは, つぎのような仕組みによってである。先ず, $\mathscr{N}$を量に見做すことを通じて, ⊙も⊗として捉えることができる((2))。このとき量計算は, 量$a_1 \in$ Q$_1$, $a_2 \in$ Q$_2$, ……, $a_n \in$ Q$_n$に対し,

$$a_1 \square a_2 \square \cdots\cdots\cdots \square a_n$$

の□に⊕, ⊖(⊕の逆算法), ⊗, ⊘(⊗の逆算法) のいずれかを代入し, さらにいくつかの括弧 (,) を書き加えた形のものになる。これを$f(a_1, \cdots\cdots\cdots, a_n)$で表わすとしよう。但し, $f(a_1, \cdots\cdots\cdots, a_n)$は, ここでの$a_i$ (i=1, ………, n) を一旦変数 (variables) x_i (i=1, ………, n) に見做して得られる式$f(x_1, \cdots\cdots x_n)$に量a_iを代入したものと読むとする。

さて, 各$a_i \in$ Q$_i$はQ$_i$の単位量u_iと$\alpha_i \in \mathscr{N}$に対して$a_i = u_i \odot \alpha_i$と書ける。また一方,

$$(u \odot \alpha) \oplus (u \odot \beta) = u \odot (\alpha + \beta),$$
$$(u \odot \alpha) \ominus (u \odot \beta) = u \odot (\alpha - \beta),$$
$$(u \odot \alpha) \otimes (v \odot \beta) = (u \otimes v) \odot (\alpha \times \beta),$$
$$(u \odot \alpha) \oslash (v \odot \beta) = (u \oslash v) \odot (\alpha / \beta)$$

が一般的に成り立つ。したがって$f(a_1, \cdots\cdots\cdots, a_n)$は,

$$\Phi(u_1, \cdots\cdots\cdots, u_n) \odot \mathrm{F}(\alpha_1, \cdots\cdots\cdots, \alpha_n)$$

の形にもっていくことができる。ここで, Fは, 式fにおける⊕, ⊖, ⊗, ⊘をそれぞれ$\mathscr{N}$における算法+, −, ×, /に置き換えて得られる式である。特に, Fは式としてfに<同型>である。

単位計算$\Phi(u_1, \cdots\cdots, u_n)$は, 一旦

$$u_{j_1} \square u_{j_2} \square \cdots\cdots\cdots \square u_{j_m}$$

の□に⊗あるいは⊘が代入された形のものになる。そして，この計算はつぎの約束のもとに進められる。即ち，Qの単位uとQ′の単位u'に対し，$u\otimes u'$を$Q\otimes Q'$の単位と定め，$u\oslash u'$をHom(Q，Q′)の単位と定める(註)という約束である。

(註) 一般に，量Q，Q′と$u\in Q-\{0\}$，$u'\in Q'$に対し，$u\oslash u'$をHom(Q，Q′)の元と捉えることができる。

例として，<長さ>，<面積>，<体積>のカテゴリーQ，Q′，Q″を考えよう。Q，Q′，Q″それぞれの単位量u，u'，u''は慣例として$u\otimes u'=u''$となるように定められる。またこの意味で，$u=u''\oslash u'$，$u'=u''\oslash u$である。

一方，$u''\oslash u'$，$u''\oslash u$に対しては，Hom(Q′，Q″)，Hom(Q，Q″)の元としての解釈が成り立つ。即ち，$f(u')=u''$なる$f\in$ Hom(Q′，Q″)は一意に定まるが，$f(u')=u'\otimes f$の意味で，$f=u''\oslash u'$である。同様に，$f(u)=u''$なる$f\in$ Hom(Q，Q″)が$u''\oslash u$である。ここでの⊘を$\widehat{\oslash}$で表わそう。

このとき$u=u''\oslash u'\longrightarrow u''\widehat{\oslash}u'$はQのHom(Q′，Q″)の上への同型（量としての），$u'=u''\oslash u\longrightarrow u''\widehat{\oslash}u$はQ′のHom(Q，Q″)の上への同型となる。したがって，実質<長さ>としての$u''\oslash u'$は$u''\widehat{\oslash}u'\in$ Hom(Q′，Q″)と同一視することが可能で，実質<面積>としての$u''\oslash u$は$u''\widehat{\oslash}u\in$ Hom(Q，Q″)と同一視することが可能になる。

(4) 数の算法

数の加法は，倍の和として定義される。即ちα，$\beta\in\mathcal{N}$に関する$\alpha+\beta$は，一つの量（カテゴリー）Qに対しての倍：$a\longmapsto(a\odot\alpha)\oplus(a\odot\beta)$ $(a\in Q)$として定義される。

数の乗法$\alpha\times\beta$の方は，倍の合成ということで，倍：$a\longmapsto(a\odot\alpha)\odot\beta$ $(a\in Q)$として定義される。

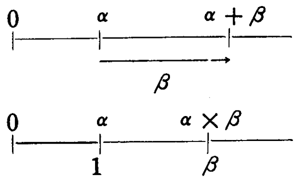
このようにして定義された算法＋，×は，数$\mathcal{N}$に体としての代数的構造を定める。但し，この数の構造（＝(順序)体）が，あくまでも量の構造によって保証されているものであることに，ここでは注意しておこう。

なお言うまでもなく，－，／はそれぞれ＋，×の逆算法として定義される。即ち，$\alpha-\beta$は$\beta+\gamma(=\gamma+\beta)=\alpha$なる$\gamma$のこととして，また$\alpha/\beta$は$\beta\times\gamma(=\gamma\times\beta)=\alpha$なる$\gamma$のこととして，それぞれ定義されるものである。

(5) 数の算法の理解図式（線分図）

数α，βに関する数$\alpha+\beta$〔$\alpha-\beta$，$\alpha\times\beta$，α/β〕は，何がしかの量aに対する$a\odot\alpha$，$a\odot\beta$と$a\odot(\alpha+\beta)$〔$a\odot(\alpha-\beta)$，$a\odot(\alpha\times\beta)$，$a\odot(\alpha/\beta)$〕の関係として把握される（のみである）。そしてこの関係の視覚化として線分図がある。

$\alpha+\beta$と$\alpha\times\beta$の線分図はそれぞれつぎのようになる：

(i)
(ii)


この図式は、感覚的には明らかなのであるが，きちんと理屈づけるとなると，少し面倒な議論になってくる。

先ず，直線LとL上の一点Oを固定する。また，L上の移動（ベクトル）全体は一つの量カテゴリーをなすが，これをQで表わそう。

つぎにLは，Qに関してアフィン空間として見ていける。実際，Lの各点XはOからXへの移動ベクトル$\vec{v}\in Q$に対し$X=O+\vec{v}$と書ける。そして固定して考えた$\vec{u}\in Q-\{0\}$に対する$O+\vec{u}\odot\alpha$（〔α〕とおく）が，図(i)，(ii)のαの身分なのである。

さて$\vec{u}\odot(\alpha+\beta)=\vec{u}\odot\alpha\oplus\vec{u}\odot\beta$。よって

$$\begin{aligned}O+\vec{u}\odot(\alpha+\beta)&=O+(\vec{u}\odot\alpha\oplus\vec{u}\odot\beta)\\&=(O+\vec{u}\odot\alpha)+\vec{u}\odot\beta\\&=[\alpha]+\vec{u}\odot\beta。\end{aligned}$$

そしてこの関係式が図(i)の理由になる。

(ii)の場合はどうなるか。先ず1とβの身分は，$\vec{u}\odot\alpha=\vec{u}'$とおいたときのそれぞれ$O+\vec{u}'\odot 1$と$O+\vec{u}'\odot\beta$である。ところで，

$O+\vec{u}\odot(\alpha\times\beta)=O+(\vec{u}\odot\alpha)\odot\beta$

$=O+\vec{u}'\odot\beta$。

そしてこの関係式が，図(ii)の理由になる。

2―2　整数／整数としての分数

分数の意味は量の関係概念としての＜倍＞である。ただし，分数の“分数”たる所以は，この倍が整数比として表現されるところにある。ところで分数には，言わば機能的解釈としての，整数／整数(／は“割る(÷)”と読む)の意味が，一方にある。後者の意味では，分数は整数／整数の計算式――但し，その結果と二重映しに見られるところの計算式――の簡便記法である。

数／数は，前節で見たように，量計算の文脈に＜倍＞同士の計算として現われる。したがって，量の関係概念としてそれ自体は一つの＜倍＞を表現している分数と，整数／整数としての分数とは，本来全く別のものである。

こうして，整数m，nに関する分数$\frac{m}{n}$については，一つの＜倍＞を意味する整数比$m:n$としてのものと，二つの倍m，nの除法m/nとしてのものの二つを意味的に区別できることになるが，言い回しの簡単のために，前者の意味の分数を第一種（分数（Ⅰ）)，後者の意味の分数を第二種（分数(Ⅱ)）とここでは称しておこう。

ところで，分数(Ⅰ)の$\frac{m}{n}$と分数(Ⅱ)の$\frac{m}{n}$は，結果的に同一の＜倍＞を表現している（ことがわかる)。そして正にこの故に，分数の前者の意味は，適宜，後者の意味に捉え直される。実際，分数計算は，後者の意味の下で形式的な処理が可能になるのである。

整数比としての倍$\frac{m}{n}$は，量aに対し，n倍してaになる量cのm倍の量bを対応させるものである。ここでcはaとbの公約量で，aとbはcのそれぞれn，m倍である。そしてこのことが，表現$\frac{m}{n}$の根拠になっていた（§1―2)。またここで，$a\odot\frac{m}{n}=b=c\odot m=(a\oslash n)\odot m$。

他方，整数／整数としての倍$\frac{m}{n}$は，定義から，n倍を合成するとm倍になる倍のことであるから，$(a\odot\frac{m}{n})\odot n=a\odot(\frac{m}{n}\times n)=a\odot m$，よって$a\odot\frac{m}{n}=(a\odot m)\oslash n$。したがって分数$\frac{m}{n}$の二つの意味の同一視は，倍の作用$(\cdot\oslash n)\odot m$と$(\cdot\odot m)\oslash n$の同一視のことになる。

2―3　分数計算の式変形の意味づけ

前節では，“分数”に対して第1種(Ⅰ)と第2種(Ⅱ)というカテゴリー区分を行った。この区分けは，分数計算の式変形の意味を考える上で本質的である。実際，分数計算の式変形は，分数のこの二つの意味に応じて，捉え方が自ずと異なってくる。本節では，このことを倍分・約分，加減法，乗除法の各々について見ていくことにする。

(1)　分数(Ⅰ)の場合

(i)　倍分・約分

$\frac{m}{n}$は，量aに対し，n倍がaに等しい量cのm倍の量bを対応させる倍のことであった。ところで，任意の整数$k\neq 0$に対し，k倍がcになる量をdとすると，

$d\odot(n\overset{(註1)}{\times}k)\overset{(註2)}{=}(d\odot k)\odot n=c\odot n=a$。

同様に$d\odot(m\times k)=b$。よって，倍$\frac{m\times k}{n\times k}$は$\frac{m}{n}$に等しい。

（註1）×は，整数環Zにおける乗法。

（註2）ここでの相等関係は，倍の定義にではなく，量の性質（公理）によるものである。

(ii)　加法・減法

先ず，$\frac{p}{N}\pm\frac{q}{N}=\frac{p\pm q}{N}$。実際，任意量$a$に対し，$N$倍して$a$になる量を$b$とすると，

$$a\odot\left(\frac{p}{N}+\frac{q}{N}\right)\overset{(註1)}{=}\left(a\odot\frac{p}{N}\right)\oplus\left(a\odot\frac{q}{N}\right)$$

$$=(b\odot p)\oplus(c\odot q)\overset{(註2)}{=}c\odot(p+q)$$

$$=a\odot\frac{p+q}{N}$$

特に，$\frac{q}{N}+\frac{p-q}{N}=\frac{q+(p-q)}{N}=\frac{p}{N}$，よって $\frac{p}{N}-\frac{q}{N}=\frac{p-q}{N}$。

そこで，$\frac{m}{n}\pm\frac{m'}{n'}$において，$N$が$n$と$n'$の公倍数で$N=n\times k=n'\times k'$のときには，

$$\frac{m}{n}\pm\frac{m'}{n'}=\frac{m\times k}{n\times k}\pm\frac{m'\times k'}{n'\times k'}$$
$$=\frac{m\times k}{N}\pm\frac{m'\times k'}{N}=\frac{m\times k\pm m'\times k'}{N}。$$

（註１）倍の加法の定義。
（註２）量の性質（公理）による。

(iii)　乗法・除法

先ず$\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}=\frac{m\times m'}{n\times n'}$を示す。任意量$a$に対し，$n$倍が$a$になる量を$b$，$n'$倍が$b$になる量を$c$とすると，

$$a\odot\left(\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}\right)=\left(a\odot\frac{m}{n}\right)\odot\frac{m'}{n'}$$
$$=(b\odot m)\odot\frac{m'}{n'}=(c\odot n')\odot m)\odot\frac{m'}{n'}$$
$$=((c\odot m)\odot n')\odot\frac{m'}{n'}\overset{(註1)}{=}(c\odot m)\odot m'$$
$$=c\odot(m\times m')。$$

cの$(n\times n')$倍がaだから，$c\odot(m\times m')=a\odot\frac{m\times m'}{n\times n'}$。結局，$\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}=\frac{m\times m'}{n\times n'}$。

また，上の結果から，

$$\frac{m'}{n'}\times\frac{m\times n'}{n\times m'}=\frac{m'\times(m\times n')}{n'\times(n\times m')}$$
$$\overset{(註2)}{=}\frac{m\times(m'\times n')}{n\times(m'\times n')}=\frac{m}{n}。$$

よって，$\frac{m}{n}\Big/\frac{m'}{n'}=\frac{m\times n'}{n\times m'}$。

（註１）倍$\frac{m'}{n'}$の定義。
（註２）×は，整数環Zにおける乗法。

(2)　分数(Ⅱ)の場合

ここでは，減法，除法は，導き方が分数(Ⅰ)の場合と同様であるので，省略する。なお，分数(Ⅱ)としての$\frac{m}{n}$は，nに乗じるとmになる数（n倍と合成するとm倍になるような倍）として定義されるのであった。

以下に現われる算法＋，×は，すべて$\mathcal{N}=\mathcal{R}(\mathrm{Q})$におけるものである。

(i)　倍分・約分

分数$\frac{m}{n}$と整数$k\neq 0$に対し，

$$\frac{m}{n}\times(n\times k)=(\frac{m}{n}\times n)\times k=m\times k$$

であるから$\frac{m}{n}=\frac{m\times k}{n\times k}$。

(ii)　加法

先ず，$\left(\frac{p}{N}+\frac{q}{N}\right)\times N=\frac{p}{N}\times N+\frac{q}{N}\times N=p+q$だから，$\frac{p}{N}+\frac{q}{N}=\frac{p+q}{N}$。これを用いて一般に$\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}=\frac{m\times k+m'\times k'}{N}$（但し，$N$は$n$と$n'$の公倍数で，$N=n\times k=n'\times k'$）となることを示すやり方は，分数(Ⅰ)の場合に同じ。

(iii)　乗法

$$\left(\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}\right)\times(n\times n')$$
$$=\left(\frac{m}{n}\times n\right)\times\left(\frac{m'}{n'}\times n'\right)=m\times m'$$

であるから，$\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}=\frac{m\times m'}{n\times n'}$。

さて，以上本節では，分数計算の式変形を意味づけることをしたわけであるが，この式変形の意味づけと式変形を発見的に得させる理解図式（イメージ）についての議論とは，勿論別のものである。そして後者こそが指導実践レベルでの問題になってくる。これについては，分数指導の実践論の形で稿を改めて論ずることにする。

2－4　分数としての小数

小数の本来の身分は，量の“位取り”表現による数値というものであるが，小数はまた分数の身分でも用いられる。即ち，小数$0.k_1k_2\cdots\cdots k_n$が＜割合＞＝基準量に対する＜倍＞$\frac{k_1k_2\cdots k_n}{10^n}$の意味で用いられる場合である。

小数$0.k_1k_2\cdots\cdots k_n$が“位取り”表現によったときの量aの数値であるということの意味

は，基本単位量uに対する下位単位量$u_1=u\odot10^{-1}$，$u_2=u_1\odot10^{-1}$，………，$u_n=u_{n-1}\odot10^{-1}$（10^{-1}は10倍の逆倍）について

$$a=u_1\odot k_1\oplus u_2\odot k_2\oplus\cdots\cdots\oplus u_n\odot k_n$$

ということである。そして小数$0.k_1k_2\cdots\cdots k_n$を分数$\frac{k_1k_2\cdots k_n}{10^n}$の意味に捉え直すとは，それを——基本単位量に対する＜倍＞の意味での——uに対する数値として読み直すということである：

$$a=u\odot\frac{k_1k_2\cdots k_n}{10^n}$$

したがって，小数計算の量による意味づけとしては，加法については

$$(u_1\odot k_1\oplus\cdots\cdots\oplus u_n\odot k_n)$$
$$\oplus(u_1\odot l_1\oplus\cdots\cdots\oplus u_n\odot l_n)$$
$$=u_1\odot(k_1+l_1)\oplus\cdots\cdots\oplus u_n\odot(k_n+l_n)$$

と

$$u\odot\frac{k_1\cdots k_n}{10^n}\oplus u\odot\frac{l_1\cdots l_n}{10^n}$$
$$=u\odot\left(\frac{k_1\cdots k_n}{10^n}+\frac{l_1\cdots l_n}{10^n}\right)$$
$$=u\odot\frac{k_1\cdots k_n+l_1\cdots l_n}{10^n}$$

の二つが区別されるものとしてあり，乗法については，

$$(u_1\odot k_1\oplus\cdots\cdots\oplus u_n\odot k_n)$$
$$\otimes(v_1\odot l_1\oplus\cdots\cdots\oplus v_m\odot l_m)$$
$$=\bigoplus_{i=1}^{n+m}\bigoplus_{j=0}^{i}(u_{i-j}\otimes v_j)\odot(k_{i-j}\times l_j),$$

$$(u_1\odot k_1\oplus\cdots\cdots\oplus u_n\odot k_n)\otimes v\odot\frac{l_1\cdots l_m}{10^m}$$
$$=(u_1\otimes v)\odot\left(k_1\times\frac{l_1\cdots l_m}{10^m}\right)$$
$$\oplus\cdots\cdots\oplus(u_n\otimes v)\odot\left(k_n\times\frac{l_1\cdots l_m}{10^m}\right),$$

$$\left(u\odot\frac{k_1\cdots k_n}{10^n}\right)\otimes\left(v\odot\frac{l_1\cdots l_m}{10^m}\right)$$
$$=(u\otimes v)\odot\left(\frac{k_1\cdots k_n}{10^n}\times\frac{l_1\cdots l_m}{10^m}\right)$$

の三つが区別されてくる。そしてこれらの各々の意味は，小数の加法，乗法のアルゴリズムに別様の解釈をもたらすことになる。

Ⅲ　分数指導の意義

分数指導の意義は，端的に，＜（正の）有理数＞という（記号的）存在を意識対象化させることであると言える。ここで有理数は，量の関係概念ないしそれの実体化の概念といった身分のものである。

この有理数の前には自然数が指導されているが，自然数は有理数の中に形式的に（また意味的に）埋め込まれるとはいえ，本来の意味からいうと，有理数とは全く別のものである。自然数の意味は，端的に，“はじめ”と“そのつぎ(next)”である。或る固定した一つの対象“はじめ”に対して“そのつぎ”を順次指定していく。これが自然数であり，したがって“順序数”が自然数の本性を表わすコトバである。(註1)

さて，このような自然数に対して，有理数の場合は，量の関係概念としての“比”，および一方の量に＜基準＞の身分が与えられた場合の“比”としての“割合”，さらに，“割合”という二量の静的関係を対応関係に捉え直したものとしての“倍”が，それの意味になる。したがって，有理数指導の意味をもつ分数指導の意義は，第一に，これらの概念の指導ということである。

比（割合・倍）の概念の根本概念になるものは，公約量である。したがって，公約量を実際に求めることができるのでなければ，ここで考えている本来の意味の分数指導は一歩も進まない。ゆえに量のレベルにおけるユークリッドの互除法が，必然的に指導内容に入って来なければならない。そこでまた，分数指導は，ユークリッドの互除法の指導の成否というところで，先ず試されることになるのである。

つぎに，分数指導には，計算の指導という局面がある。これは，＜倍＞に関する算法の指導——＜倍＞の算法という概念の指導，および，知識の身体的レベルである計算“技能”の指導——として，意義づけられるべきである。この分数計算の指導においては，分数は概念上整数／整数から意識的に区別されていなければならない。実際，有理数自体は整数／整数ではな

い。整数／整数が有理数の表現になり得るというだけのことである。しかし，概念として区別できることの一方で，分数計算では，≪分数$\frac{m}{n}$はm／nと結果的に同値なるものである≫という認識の下で分数を整数／整数へと捉え直すことができなければならない。このステップを踏まなければ，計算の本義である数の形式的処理が不自由なものになるからである。そして，分数＝整数／整数と捉える観点は，やはり＜倍＞である。即ち，分数＝整数倍／整数倍ということで。数計算における数の形式的処理は，数を＜倍＞の身分で捉えることにおいて，はじめて理由づく。量に拠っていたのでは，一般性をもつ意味づけはできない。例として，$\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}=\frac{m\times m'}{n\times n'}$の式変形を考えてみよう。これを量の意味に拠って説明しようとすれば，左辺のm，n，m'，n'と右辺のm，n，m'，n'とでは意味づけを変えなければならない。例えば，些か無理な設定ではあるが，左辺のm，n，m'，n'にそれぞれ面積，長さ，体積，長さの身分を与え，最初の／を長さ⊗長さ＝面積の逆算法，第二の／を面積⊗長さ＝体積の逆算法と読むとしよう。このとき左辺の式は，長さ⊗面積の式ということで“well-defined”である。しかし，m，n，m'，n'の意味を右辺に持ち越すことはできない。実際，$m\times m'$が定義できなくなる。

式の要素である数の身分として，式変形の中で一貫して考えていけるものは，＜倍＞である。数計算が或る特定の量計算の数値計算の身分であるときに，計算過程の各式に現われる数は，それぞれ或る（単位）量に対する倍としての身分をもつが，単位の定め方と量の同型によって，この＜倍＞の身分は（単位量）の如何に依らないものとして均一化される。言い換えると，この身分は式変形の中で終始保たれる。(註2)

したがって分数計算の指導では，量に拘っていくのではなく，全く逆に，量からふっ切れる過程を示すことが本質的になる。(註3)そして，量計算の仕組み――単位量計算と数値計算との分離――の指導というのが，これの形態になるであろう。

しかしここで，それがどの程度までに算数科の内容になるかという問題が起こる。実際，単位量計算を正に文字通りのものとして学習者に感得させることになるような量計算は，高校の物理ないし化学において初めて本格的に現われると言える。算数科の段階で扱える量計算では，概念自体の抽象性・難解性の問題はともかくとして，量計算が確かに単位量計算と数計算の分離という形で為されているということをはっきり印象づけるのは難しい。現に，学習者一般の意識の上では，数は単位量に対する倍ではなく≪単位の省略≫になっているのではないか。

知識としての分数計算を意味と形式（文法）の二つの局面に分けて考えるならば，形式（文法）を教授／学習することの方は，算数科の段階でも可能である。実際，分数計算は，形式（文法）として知識化されているのが一般的である。しかしいま問おうとしているのは，分数計算の一般性（普遍性）をもつ意味が算数科の段階で教えられるのかということである。（但しこの問いには，“どの程度まで教えられるのか”，“どこまで教えるのか”，或いは，“教えてよいのか”，という問いも含ませるとする。）この課題に対しては，実践論の形で受けていくことにしよう。

（註1）自然数の本質は，“集合数”にはない。実際，“集合数”は“順序数”の応用的局面に過ぎない。即ち，“そのつぎ”の問いによって生成される系列は，モノの＜個数＞を数えることに応用できる。そして数のこの現象面を独立にとりだして別の形で概念化したものが“集合数”というわけだ。したがって，スローガン的に言えば，“集合数というものは無い”のである。（なお，§1―1，（註2）参照。）

（註2）実際，量計算を単位量計算と数（値）計算の二つに分離したときには，数計算の中の全ての数は，結果的に，単位量計算によっ

て最終的に得られる単位量に対する倍としての身分で捉えることができる。

（註3）数が単一の量に対する倍ということで均質化されている状態は，量が一つしかない状態であり，そして量が一つしかないとは，実質的に，"量が無い"ことである。

おわりに

本論文では，第1，2章において"分数"の知識＝認識形式としての意味を考察し，さらにそこで考察したことのインプリケーションという意味合いで，第3章において"分数"指導の意義を論じてきた。そして，実践論が，ここで残された課題である。即ち，第3章で論じた"分数"指導の意義を直接受け止めるような指導法の具体的提示がそれであり，本論考はこれを以て一段落つくことになる。この研究を予告しつつ本稿を閉じるとしよう。

引用・参考文献

〔1〕 Bourbaki, N.：『数学原論』「位相2」"歴史覚えがき"．東京図書，1968，pp. 171—183。

〔2〕 小島順："“量の計算”を見直す(1—6)"．数学セミナー，1977. 8月—1978. 1月。

〔3〕 宮下英明："量・数・量計算（I）"．金沢大学教育学部紀要（自然科学編），№34（1985），pp. 37—53。

〔4〕 森　毅："分数の文化"・現代数学，1974. 9月，pp. 8—11.