算数科“図形”領域教材研究—考察２(1)—

宮　下　英　明

On "Informal Geometry" in Elementary School Mathematics — 2 (1)

Hideaki MIYASHITA

目　次

1 “図形”領域教材研究と〈空間〉

1.1 キャンバスとしての空間

日常語の“空間”は，そこにモノがあったりなかったりする空間である。それは空虚であり，モノはこの空虚の一部に場所を占める。これに対し，数学の空間は，点（と呼ばれる要素）の集合として，存在で満たされている。存在に対するところの空虚はない。

空間は，当然，目的がもたれて導入される。われわれの意識対象になっている事態を空間の上に表現し，この表現を扱って何がしかの結論に至ろうとする。

事態は，空間の部分（空間）として表現され

1989年４月28日受理

る。部分は，われわれの〈見方〉である。空間の一部を着色してそれを他から際立たせることが，“部分の対象化”である。その部分の色の原因は外（即ち，われわれ）にあり，空間自身にはない。空間は，この着色の行為によっては何も変えられていない。

事態を空間の部分として表現することは，キャンバスの上に絵を描く行為と変わらない。空間は，その上にわれわれが絵を描こうとするところのキャンバスである。

描こうとする絵によって，キャンバスが選ばれる。ある特定の種類の絵を描くために，また描かれることを想定して，ある種類の空間が用意される。適当な空間が既成になければ，新たに創作する実践が開始される。

1.2 空間の主題化

“図形”の主題は，われわれが或る種類のキャンバスの上に描く或る種類の絵である。

わたしは，“図形”がわれわれが描いたものであること（その意味でわれわれに帰すること）をはっきりさせるために，そして“描く”と言うときそれは何かの上に描くことであるということをはっきりさせるために，“絵”および“キャンバス”ということばを用いることにする。

わたしがここで“絵をキャンバスの上に描く”と言うとき，それは“鉛筆で紙の上に三角形を描く”といったような意味で言うのではない。“キャンバス”は空間である。キャンバスとしての空間に描かれている絵が，ここでの“絵”である。“描く”は，空間の上に絵を描くの意味である。“描く”は空間の部分に対する着色であり，したがってこのときの“絵”は，所謂実在ではない。

繰り返すが，“図形”の主題は，《或る種類のキャンバスの上に描かれる或る種類の絵》である。そしてその“或る種類”の特殊性において，それは（理科や社会科などではない）算数科の主題になっている。

この“或る種類”の意味を一般的に述べることはできない。それは“あれとかこれとか”の各論の形で明らかされる。そして各論をつくっていくことが，“図形”領域教材研究の内容になる。（わたしは，この実践が“図形”領域教材研究の全てになるという言い方をここで敢えて選んでいる。）

“図形”を専ら“（われわれが用意した）キャンバスの上の（われわれが描いた）絵”として主題化すること，これが強調点である。そしてこの意味で，〈空間〉が自ずと“図形”領域教材研究の主題に上ることになる。宙に漂うもののように“図形”（絵）をこれまで指導の中で扱ってきたとすれば，それをキャンバスの上に戻してやらねばならない。

2 空間の概念

2.1 空間の概念

2.1.1 構造を伴う点集合のシステム

数学では，一個の対象としての空間は，構造が考えられている一つの集合あるいは複数の集合の組である。それは，集合（の組）とその上の構造の対の概念である。

空間が集合であるとは，（“点”と呼ばれる）それの要素が存在の全てということである。

一つの構造を述べることは，“空間”の一つのカテゴリーを導入することに等しい。特に，一つの対象に対する“空間”としてのそれの特定は，対象を集合として特定することと，対象が属するカテゴリーを明示することの二つからなる。

2.1.2 構造

数学では，“構造”の概念は集合のことばを用いて明確に規定されている。日常語の“構造”に付随する曖昧さは，数学の“構造”の場合には全くない。——逆に言えば，数学では，数学で規定する“構造”の意味から外れては，“構造”のことばを使えない。但し，“構造”の日常語的使用を許すために，数学で規定される構造に対し特に“数学的構造”という言い方

をすることもある。

2.2 空間の意義

2.2.1 キャンバスとしての空間

空間は，われわれがその上に絵を描こうとするところのキャンバスの一種である。

この比喩での“キャンバス”として，“電光掲示板”を思い浮べるとしよう。そこでは，オンになっている電球とオフになっている電球とで，絵がつくられる。

絵は，オンになっている電球全体のこととして，空間の部分である。

このときの絵を描く行為は，空間の或る部分の顕在化である。そしてこの行為は，存在としての空間を変えない。空間は，われわれの絵を描く行為から独立している。空間の“部分”は，空間に対するわれわれ自身の投企である。

われわれの描く絵は，何かの表現であるかも知れないし，そうでないかも知れない。そして，何かの表現であるか否かは，絵にとって本質的なことではない。実際，絵自体は，それが何かの表現であるかそうでないかについては，何も語ってくれない。表現か否かは，絵そのものの問題ではなく，描くわれわれの思いの問題である。

2.2.2 世界の事態の空間表現

2.2.2.1 世界と空間

われわれがキャンバスとしての空間に描く絵は，世界の事態の表現かも知れない。

ここで“世界”とは，論理の系のことである。世界内対象は，論理的対象（名辞）である。

“世界”は色々に考えられる。“現実世界（real world）”としてわれわれの対象化するものも世界である。日常言語も世界である。幾何学も世界である。

空間それ自身は世界にはならないが，それの述定（空間論＝“メタ空間”）は世界になる。そしてこの世界の事態を別の空間の上に絵で表現するということも，理論的には考えることができる。（例えば，位相幾何学の或る命題に対し，それの絵を2次元ユークリッド空間としての平面の上に描く等。）

2.2.2.2 幾何学と空間

幾何学は，それぞれ，一つの世界である。そこで，各幾何学について，《世界内事態を表現する》という目的での空間の導入が考えられてくる(註)。

空間を幾何学の表現のように考えてはならない。幾何学に対して空間が導入されるとき，それは，〈幾何学内事態の表現としての絵がその上に描かれるところのキャンバス〉として導入されるのである。幾何学に対する空間の意義は，われわれが幾何学における対象を空間の部分として表現したり，対象間関係を空間の部分の間の関係として表現したりするといったことに，示されている。

特に，“しかじかの幾何学を満たす空間”という言い回しは，適切とは言えない。“満たす”は，“幾何学の事態を不足なく表現する絵をその上に描くことができる”というように読まれなければならない。

（註）例えば，幾何学基礎論の形で（ヒルベルトの公理系として）述べられるユークリッド幾何学に対し，ユークリッド空間（§3.5）が導入される。

2.2.3 空間の使用価値

空間は，キャンバスとして使用される。空間の価値は，キャンバスとしてのそれの価値であり，キャンバスとしての使い勝手で空間は評価される。

使用を想定せず，記号操作的に（論理的に）可能ということだけで，空間が作為されることはあり得る。しかし使用がなければ，それはアブストラクト・ナンセンスとして消える。消えないで残るとすれば，それは，現前の或る空間を相対化するという使用価値(註)においてである。

（註）“色々ある空間の中の一つ”という形で相対

化されていない空間は，“空間”である必要がないという意味で，“空間”ではない。

2.3 空間の類

2.3.1 同種

構造を述べる形の空間の定義で与えられるものは，特定の空間ではなく，空間の一つの類である。但し，その類は類として特定されて与えられるわけではない。それは内包に対する外延として，擬似論理的に先取される。

われわれは，空間の定義が与える類に属する二つの空間に対して，“同種の空間”という言い方を用いることにする。

2.3.2 同型

同種の空間に対しては，“同型”という同値関係が概念化される。

同種の空間X，Yにおいて，両者の対応する基礎集合（集合の組としての空間を構成している集合）の間に1対1対応が存在し，これら1対1対応がXとYの対応する基礎概念（集合として定義される）の間の1対1対応を導くとき，XとYは同型であると言う。

同型は同値関係であり，特にそれは同種の空間の類に分割をもたらす。

2.3.3 カテゴリー

“カテゴリー”も類の概念の一つになる。（カテゴリーを考える対象は，空間に限られない。）

3 “現空間”の数学的定式化

3.1 点集合

幾何学的空間は，“現空間”の数学的定式化である。直接そのようには見えない幾何学的空間も，遡行すれば，“現空間”の数学的定式化と言い得るものに行き着く。

“現空間”の数学的定式化は，これを〈点集合〉としての解釈をすることから始まる。“現空間”は，点で成るものとして表現される。

生活者としてのわれわれは，“現空間”を点が構成するものとしては考えない。“点”は方便として出て来る。

実際，“点”の概念は，“現空間”の中に一つの位置を特定するという実践において起こる。日常語の“位置”は，“何かの位置”として，“何か”を要請する。そして対象がそこに無いとき，ひとは方便として“点”をつくる。そして，“点が存りそしてそれの位置”という含みで，“位置”の語が使われるようになる。

“点の位置”と言うときの“点”は，本質的に何も効いていない。実際，“点”の指示を“位置”の指示から区別することはできない。

このように生活の中では，点とは存在の概念ではなく，一つの実践様式である。日常語の“点”と数学の“点”の間には，意識の上で大きなギャップがある。数学の“点”が算数において主題化されるとき，このことは教材研究での第一級の留意事項になる。

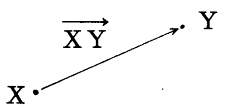
3.2 実アフィン空間

点集合としての“現空間”――Eで表わす――に対し，変位（ベクトル）の集合DをEに随伴するものとして考える。

日常語の“変位”については，

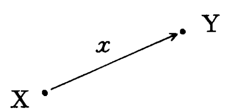
(*a*) 任意の二点X，Yに対し，“Xに対するYの変位”というものを対象化できる．

点Xに対する点Yの変位を$\overrightarrow{XY}$と書くことにする。



また，“変位”の語は“何に対する何の変位”のように使われるのが専らではない。即ち，

(*b*) 任意の一点Xと任意の変位xに対し，Xに対する変位がxであるような点Yが対象化できる．



という具合に，変位はそれのみで独立して存在しているものとしても，扱われる。

いま，変位全体の集合Dを仮構し，上の要件（b）を，

Eの任意の要素XとDの任意の要素xに対し，結果としてEの一つの要素Yをもたらすような“Xに対するxの作用”がつねに定義される．

という形に表現する。即ち，“Eの要素に対するDの要素の（つねに定義される）作用”の概念を導入する。この作用を右作用として

$$_{+}:\ (X,\ x) \longmapsto X_{+}x\ ;$$
$$E\times D \longrightarrow E$$

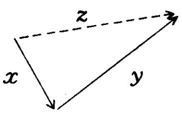
のように書くことにすると，上の要件（a）は，

任意のX，$Y\in E$に対し，$X_{+}x=Y$となる$x\in D$が一意的に存在する．

というようになる。

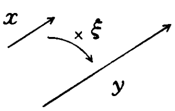
日常語の“変位”については，さらに，

（α）任意の二つの変位x，yに対し，xとyの合成としての変位zを対象化することができる．



また，

（β）任意の変位xと任意の実数ξに対し，xのξ倍としての変位を対象化することができる．



いま，要件（α），（β）を，それぞれ，“Dの（内）算法の存在”，“Dの要素に対する実数の（つねに定義される）作用の存在”という形に表現する。そしてDの内算法を

$$+:\ (x,\ y) \longmapsto x+y\ ;$$
$$D\times D \longrightarrow D,$$

Dの要素に対する実数の作用を（右作用として）

$$_{\times}:\ (x,\ \xi) \longmapsto x_{\times}\xi\ ;$$
$$D\times \mathbb{R} \longrightarrow D$$

のように書く（$\mathbb{R}$は実数全体の集合を表わす)。

日常語の“変位”では，変位の合成は結合法則，交換法則が成立することになっており，また各変位に対しそれを解消する変位が存在することになっている。変位の解消は変位の合成であるから，算法＋を導入した手前，その結果もまた一つの変位であると約束しておいた方が形式操作上都合がよい。そこで，零を導入する。零は，“任意の変位xに対し，xとこれの合成はx”という条件で特徴づけられる。

以上のことからわれわれは，Dにおける（内）算法＋をつぎの条件を満たすものとして定式化する：

$$(x+y)+z=x+(y+z)$$
$$x+y=y+x$$

Dの要素aで，任意の要素xに対し$x+a=x$となるものが存在する——aを０で表わす．

各要素xに対し，$x+y=0$となる要素yが存在する——yを$-x$で表わす．

これは，“システム

$$(D,\ +)$$

は（可換）群である”と定式化していることになる。

実数のここでの意味は，変位に対する倍である。“倍”については，和と合成を考えることができる。この和，合成はそれぞれ，実数の（内）算法の＋，×と一致する。しかも，われわれは《実数＝倍》の意味において

システム（$\mathbb{R}$，＋）は（可換）群である．

システム（$\mathbb{R}^*$，×）は（可換）群である．

（ここで $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ [註1]）ということにし，また＋と×の間には分配法則

$$(\xi+\eta)\times\zeta=(\xi\times\zeta)+(\eta\times\zeta)$$

が成り立つということにしているが，これは$\mathbb{R}$の構造の通常の捉え方：“システム

$$(\mathbb{R},\ +,\ \times)$$

は（可換）体である”と一致する。実際，実数体$\mathbb{R}$はもともと倍の構造の定式化なのであるから，これはアタリマエである。

さて，Dの要素に対する実数の作用$_{\times}$については，われわれは

$$(x_{\times}\xi)_{\times}\eta=x_{\times}(\xi\times\eta)$$

$$(x+y)\,_{\times}\xi = x_{\times}\xi + y_{\times}\xi$$
$$x_{\times}(\xi+\eta) = x_{\times}\xi + x_{\times}\eta$$

が成り立つとしている。Dと$\mathbb{R}$についてのこれまでの条件にこの条件を加えるとき，われわれはシステム

$$((D,\ +),\ (\mathbb{R},\ +,\ \times),\ _{\times})$$

を実線型空間（実数体（$\mathbb{R}$，+，×）上の線型空間）として定式化したことになる。

最後に，Eの要素に対するDの要素の作用$_{+}$についてわれわれは

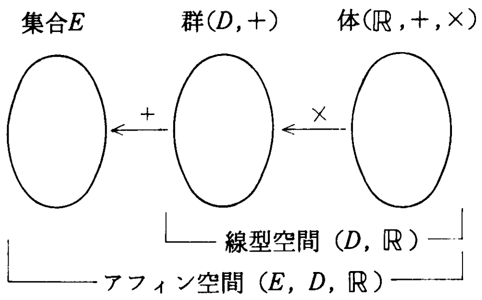
$$(X_{+}x)\,_{+}y = X_{+}(x+y)$$

が成り立つとしている。これをこれまでの条件全てに加えるとき，われわれはシステム

$$(E,\ ((D,\ +),\ (\mathbb{R},\ +,\ \times),\ _{\times}),\ _{+})$$

を実アフィン空間として定式化したことになる(註2)。

なお，誤解の恐れのないときには，表記（(D, +)，($\mathbb{R}$，+，×)，$_{\times}$)，(E, ((D, +)，($\mathbb{R}$，+，×)，$_{\times}$)，$_{+}$) の代わりに，それぞれ表記 (D, $\mathbb{R}$)，(E, D, $\mathbb{R}$) を使っていくことにする。



（註1）二つの集合X, $Y \subset Z$に対し，$X \setminus Y$は $\{x \in Z \mid x \in X$かつ$x \notin Y\}$ のように定義される集合。

（註2）記述の上では，アフィン空間Eがベクトル空間D込みで成立する概念であるのに対し，ベクトル空間Dはアフィン空間の概念を要しない。しかし，“現空間”の契機ということでは，EとDは同時である。即ち，一方が他方から導かれるというのではなく，相互依存的な関係にある。——実際，ベクトルは二点（始点と終点）に対して考えられるのみである。そして所在としての二点は，位置の違い（＝変位（ベクトル）の存在）として現前している事態である。

3.3 点，ベクトルの表現

3.3.1 点の表現——ベクトルの表現への還元

実アフィン空間（E, D, $\mathbb{R}$）に対し，Eの要素（点）の表現は，Dの要素（ベクトル）の表現に還元される。

実際，一点Oを“原点”の身分で固定するとき，Eの各点Xに対し$f(X) = \overrightarrow{OX}$（$O$に対する$X$の変位）と定義することで，$E$と$D$の間の１対１対応

$$f : E \longrightarrow D$$

が定義される。そこで点Xの表現の問題は，ベクトル$f(X)$の表現——結局，Dの要素の表現——の問題に還元される。

3.3.2 ベクトルの表現——“単位による測定”

ベクトル——線型空間（D, $\mathbb{R}$）の要素，一般に体K上の線型空間（D, K）(註)の要素——の表現のアイデアは，“単位による測定”である。

“長さ”，“重さ”，“容積”，“時間”，“速さ”のような量は，実アフィン空間と見なせる。“長さ”を例にして言うと，先ず長さ全体の集合Eを仮構する。二つの長さに対しては，日常語レベルで，一方の長さに対する他方の長さの差＝変位（ベクトル）というものを対象化できる。そこでこの変位全体の集合Dを仮構する。このE, Dに対して，前節で述べた方法をそっくりそのまま用いて，実アフィン空間（E, D, $\mathbb{R}$）を構成できる。（但しこの場合には，Eの要素に対するDの要素の作用は，つねには定義されない——例えば，長さ〈３m〉に対する〈５m減〉の作用は定義されない。）

長さのこの定式化では，足したり，実数倍ができるのは，長さそのものではなく，長さの差＝変位（ベクトル）の方である。特に，“単位による測定”はDの上の事態である。即ち，Dの一つの要素$u \neq 0$を“単位”の身分で固定し，$x \in D$に対し$x = u_{\times}\xi$となる$\xi \in \mathbb{R}$を求めることが測定である（そして，ξが単位uに対するxの

測定値ということになる)。

ベクトルの表現のアイデアは，いま述べた意味での“単位による測定”である。但しベクトル空間（D, K）一般の場合については，一つの“単位”で全てのベクトルが測られるというようにはならない。そこでわれわれは“単位”および“単位による測定”の概念を拡張する。それが，“基底”および“基ベクトルの線型結合への展開”である。

（註）実数体$\mathbb{R}$上の線型空間としての実線型空間は，体K上の線型空間の概念に一般化される。実際，線型空間（D, $\mathbb{R}$）の定義において$\mathbb{R}$は体としてのみ効いている。

Dの要素が“ベクトル”と呼ばれるのに対し，Kの要素は，“スカラー”と呼ばれる。スカラーの身分は，ベクトルの“係数”である。

3.3.3 線型空間の基底，次元

ベクトル空間（D, K）に対しこれの“基底”とは，Dの要素の組 $\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$ で，条件：

Dの任意の要素xが

$$x=u_1 \times \xi_1+\cdots\cdots+u_n \times \xi_n$$
$$(\xi_i \in K\,;\, i=1, \cdots\cdots, n)$$

の形に一意的に表わされる．

を満たすもののことである。“基底”は“単位”の概念の拡張である——“測定値”はこのとき，係数の組（ξ_1, ……, ξ_n）へと拡張されている。（“測定値”の要件は，一意であること！）この係数の組を，ベクトルxの座標（*coordinates*）と呼ぶことにする。

u_1, ……, u_nが基底を成すということには，集合 $\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$ が線型独立であるということ——どのu_iも，他のu_j ($j \neq i$) の線型結合の形には展開できない——ということが含意されている。また逆に，Dの要素の集合 $\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$ で条件：

Dの任意の要素が，u_1, ……, u_nの線型結合で書ける．

（このことを簡単に“$\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$ はD全体を生成する”と言い表わす）を満たすものは，線型独立であれば基底である。要するに，D全体を生成する集合 $\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$ を線型独立な要素の組に絞り込んでいけば基底が得られるということである。

線型空間（D, K）の基底は，どれも一定の個数の要素から成る(註)。この数を線型空間（D, K）の次元という。基底が“単位”（＝“全ての要素を数値化して表現する単位”）の概念の拡張であることを考えると，次元とは要するに，“単位”を構成するのに必要な要素の個数のことである。——特に，アフィン空間としての量（E, D, $\mathbb{R}$）における線型空間（D, $\mathbb{R}$）は１次元。

（註）証明としては，n個の要素から成る集合 $\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$ が基底になるとき$n+1$個の要素の集合 $\{v_1, \cdots\cdots, v_{n+1}\}$ は基底にならない，ということを言えばよい。実際このとき，$\{v_1, \cdots\cdots, v_{n+1}\}$ は線型従属（“線型独立”の逆）である。

先ず$n=1$の場合を考える。このとき，

$$v_1=u_1 \times \alpha_{11} \qquad (1)$$
$$v_2=u_1 \times \alpha_{12} \qquad (2)$$

と書ける。α_{11}が０なら$v_1=0$で $\{v_1, v_2\}$ は線型従属。$\alpha_{11} \neq 0$とすると，$(1)_\times(\alpha_{11}^{-1} \times \alpha_{12})-(2)$の計算から

$$v_1 \times (\alpha_{11}^{-1} \times \alpha_{12})-v_2=0$$

結局，$\{v_1, v_2\}$ は線型従属。

つぎに$n=2$の場合：

$$v_1=u_1 \times \alpha_{11}+u_2 \times \alpha_{21} \qquad (1)$$
$$v_2=u_1 \times \alpha_{12}+u_2 \times \alpha_{22} \qquad (2)$$
$$v_3=u_1 \times \alpha_{13}+u_2 \times \alpha_{23} \qquad (3)$$

α_{ij}が全て０ならv_1, v_2, v_3は全て０で，$\{v_1, v_2, v_3\}$ は線型従属。そこで，そうではないとして例えば$\alpha_{11} \neq 0$であるとすると，$(1)_\times(\alpha_{11}^{-1} \times \alpha_{12})-(2)$，$(1)_\times(\alpha_{11}^{-1} \times \alpha_{13})-(3)$の計算から，

$$v_1 \times \sigma-v_2=u_2 \times \beta_{11} \qquad (4)$$
$$v_1 \times \tau-v_3=u_2 \times \beta_{12} \qquad (5)$$

の形の連立式が得られる。そこでn＝１のときの結果から，$\{v_1 \times \sigma-v_2, v_1 \times \tau-v_3\}$ の組は線型従属。したがって $\{v_1, v_2, v_3\}$ も線型従属。

同様の考え方で，一般のnについて言える。

3.3.4 アフィン空間の枠，座標系，次元

3.3.4.1 アフィン枠

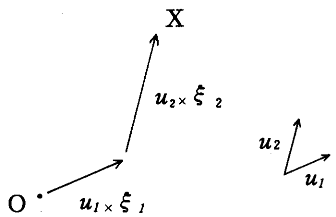
アフィン空間（E, D, $\mathbb{R}$）——一般に，体K上のアフィン空間（E, D, K）(註1)——に対し，Eの要素（点）Xの表現の問題は，“原点”の身分で固定された$O \in E$に対し$X = O_{+}x$となる$x \in D$の表現の問題——Dの要素の表現の問題——に還元される。そしてDの要素xは，Dの固定された基底 $\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$ に対し

$$x = u_{1\times}\xi_1 + \cdots\cdots + u_{n\times}\xi_n$$

となるKの要素（係数）の組（ξ_1, ……, ξ_n）で表現される。そこでEの要素の表現の問題は，原点$O \in E$とDの基底 $\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$ を固定して，これに対してEの要素Xを

$$X = O_{+}(u_{1\times}\xi_1 + \cdots\cdots + u_{n\times}\xi_n)$$

のように表わす，という形で解決されることになる(註2)。



（n＝２）

Eの要素の表現の枠となるOと $\{u_1, \cdots\cdots u_n\}$ の組（O；u_1, ……, u_n）は，そのままアフィン空間Eの枠（アフィン枠）と呼ばれる。また，各u_iは点$U_i = O_{+}u_i$に表現されるから，（O；U_1, ……, U_n）を枠と定義することもできる。

（註１）実数体$\mathbb{R}$上のアフィン空間としての実アフィン空間は，体K上のアフィン空間の概念に一般化される。

（註２）ここでの点の表現は，生活実践では“位置の表現”である。位置は，相対的位置のことである。位置の絶対的表示は，位置の相対的表示のための一つの枠が固定され，恒常的に規準として用いられている場合である。

3.3.4.2 次元

Eの点を表現する係数の個数nは，線型空間（D, K）の次元である。そこで，（D, K）の次元をそのままアフィン空間（E, D, K）の次元として定める。

日常語の“点”，“直線”，“平面”，“空間”は，それぞれ０，１，２，３次元（実）アフィン空間として解釈できる。

翻って，n次元アフィン空間（E, D, K）の部分空間(註)で１次元であるものをEの直線と呼び，$n-1$次元であるものをEの超平面と呼ぶ。

（註）$E' \subset E$, $D' \subset D$で成るアフィン空間（E', D', K）は，それの構造が（E, D, K）の構造の制限になっているとき，（E, D, K）の部分空間と呼ばれる。

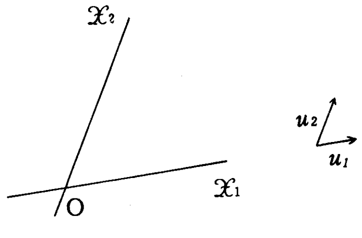
3.3.4.3 座標系

枠（O；u_1, ……, u_n）に対して点Xの表現になった係数の組（ξ_1, ……, ξ_n）は，Xの座標と呼ばれる。特に，枠からは，点にそれの座標を対応させる関数が導かれる。“座標系”ということばは，操作的に解釈して，この関数を指すものと考えるのが妥当である。

また“座標軸”は，n本の直線（１次元部分空間）

$$\mathcal{X}_i = \{O_{+}u_{i\times}\xi \mid \xi \in \mathbb{R}\} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

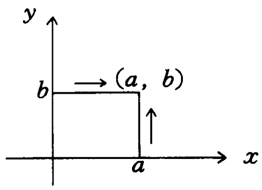
のことになる。



（n＝２）

われわれは，座標軸の上に数を目盛るということをしている。$\mathcal{X}_i$軸に対し点$O_{+}u_{i\times}\xi$のところにξを目盛るというのが，そのやり方である。——特に，点O（オー）には数０（ゼロ）が目盛られることになる。

学校数学で教材になる“平面座標”の場合，座標（a，b）の捉え方



は，結局のところ，“直線$x=a$と$y=b$の交点”の捉え方であると言える。しかし，このときの“直線”は見掛けであって，それの本質は“（２次元アフィン空間としての平面の）超平面”である。

実際，“交点”の解釈を一般化しようとするとき，“直線の交点”ではなく，“超平面の交点”でなければならない。——座標（α_1，……，α_n）の点は，n個の超平面

$$\{(\xi_1,\cdots\cdots,\xi_n)\mid\xi_i=\alpha_i\}\quad(i=1,\cdots\cdots,n)$$

の交点。

3.4 計量

3.4.1 二点間の距離とベクトルの長さ

“現空間”については，“二点間の距離”というものが対象化されている。そこで，“現空間”の数学的定式化には，“二点間の距離”の定式化も含めなければならない。

“現空間”の数学的定式化のここまでの段階——即ち，“現空間”を実アフィン空間（E，D，$\mathbb{R}$）として定式化している段階——では，二点に関する概念としては“一方の点に対する他方の点の変位（ベクトル）”が導入されている。われわれは“二点X，Y間の距離”を“ベクトル$\overrightarrow{XY}$の長さ”として定式化する[註1]。

“ベクトルの長さ”の定義は，一定の条件を満たす関数

$$L: D\longrightarrow\mathbb{R}^+$$

の定義である（ここで，$\mathbb{R}^+$は$\geqq 0$である実数全体の集合）。——$x\in D$に対し，$L(x)$が“ベクトルxの長さ”と読まれる。なお，これの表記として$|x|$を用いることにする。

関数Lに関する“現空間”の論理は，

$$L(x)=0\Leftrightarrow x=0$$
$$L(x\times\xi)=L(x)\times|\xi|$$
$$L(x)+L(y)\geqq L(x+y)$$

のように整理される[註2]。

われわれはこの条件を満たす関数Lをつくらねばならない。そしてこれの前に，このような関数を導入できるためには線型空間（D，K）の条件として何が要請されることになるかを，明らかにしなければならない。

関数Lが得られれば，点の対（X，Y）に対しその間の距離を対応させる距離関数

$$d: E\times E\longrightarrow\mathbb{R}^+$$

は，

$$d(X,Y)=L(\overrightarrow{XY})$$

で定義される。

距離関数dに関する“現空間”の論理は，

$$d(X,Y)=0\Leftrightarrow X=Y$$
$$d(X,Y)=d(Y,X)$$
$$d(X,Y)+d(Y,Z)\geqq d(X,Z)\text{（三角不等式）}$$

のように整理されるが，関数Lによってここで定義した関数dは，確かにこの条件を満たしている。

なお，関数

$$f:(X,Y)\longmapsto XY;\quad E\times E\longrightarrow D$$

を導入するとき，関数Lとdは図式

$$\begin{tikzcd} E\times E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "d"'] & D \arrow[d, "L"] \\ & \mathbb{R}^+ \end{tikzcd}$$

を可換する（即ち，dはfとLの合成に一致する）関係にある。

（註１）“二点間の距離”を“ベクトルの長さ”に帰着させて定義するここでのやり方は，あくまでも論理の上の処置（方便）である。生活実践的には，点とベクトルの概念が相互依存的である（§3.2，（註１））のに対応して，二点間の距離とベクトルの長さの概念も相互依存的である。実際，$L(x)$は，$X+x=Y$となるX，Yに対する$d(X,Y)$のこと

である。

生活実践の上では，二点間の距離およびベクトルの長さは，所与ではなく人為である。それは人の“測る”行為によって存在する。そして行為としての“二点間の距離を測る”と“一方の点に対する他方の点の変位（ベクトル）の長さを測る”の間には，区別が立たない。行為として両者を違えることはできない——あなたはできるか？

（註2）この形式において“ベクトルの長さ”の概念を一般化したのが“ノルム”である。ノルムとしてのL（x）の表記は$\|x\|$である。

3.4.2 計量線型空間

ベクトルの長さの概念を，つぎのような考え方に立って，導入するとしよう。即ち，ベクトルxの長さが，基底$\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$に対して$x$を

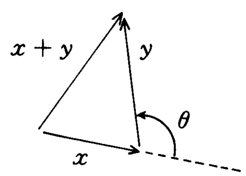
$$x = u_{1\times}\xi_1 + \cdots\cdots + u_{n\times}\xi_n$$

と展開したときの係数ξ_1，……，ξ_nの計算で求められること。

ξ_iを“xの成分$u_{i\times}\xi_i$の長さ”のように差し当たって考えることにすれば，この問題は，長さがわかっているベクトルx，yに対して$x+y$の長さを求めるという問題に還元される。

ところで平面の場合では，xとyの交角θに対し

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|\cos\theta .$$



ここでわれわれは，交角の概念を一般次元の線型空間に移入するのではなく，

$$|x|^2 = Q(x)$$

$$2|x||y|\cos\theta = B(x, y)$$

として

$$Q(x+y) = Q(x) + Q(y) + B(x, y)$$

の形式を移入する。

Q，Bは，それぞれ関数

$$Q : D \longrightarrow K, \quad B : D \times D \longrightarrow K$$

である。　いまQ，Bの条件を考えよう。

$Q(x) = |x|^2$に対しては

$$Q(x_\times\xi) = |x_\times\xi|^2 = |x|^2 \times \xi^2 = Q(x) \times \xi^2.$$

そこで逆に，

$$Q(x_\times\xi) = Q(x) \times \xi^2$$

をQの条件とする。

$B(x, y) = 2|x||y|\cos\theta$に対しては

$$B(x_\times\xi, y) = B(x, y_\times\xi) = B(x, y) \times \xi$$

$$B(x+x', y) = B(x,y) + B(x', y)$$

$$B(x, y+y') = B(x,y) + B(x,y')$$

が成り立つ[註]——即ち，Bは双線型。そこで逆に，双線型であることをBの条件とする。

以上のことは，Qを2次形式として定義したことに他ならない——そして，BはQに随伴する双線型形式ということになる。

Q（u_i）とB（u_i, u_j）（i＜j）が決まれば，$x = u_{1\times}\xi_1 + \cdots\cdots + u_{n\times}\xi_n$に対する$Q$（$x$）が定まる。実際，2次形式$Q$とこれに随伴する双線型形式$B$については，一般に，

$$\begin{aligned}
&Q(u_{1\times}\xi_1 + \cdots\cdots + u_{n\times}\xi_n)\\
&= Q(u_{1\times}\xi_1)\\
&\quad + B(u_{1\times}\xi_1,\ u_{2\times}\xi_2 + \cdots\cdots + u_{n\times}\xi_n)\\
&\quad + Q(u_{2\times}\xi_2 + \cdots\cdots + u_{n\times}\xi_n)\\
&= Q(u_1) \times \xi_1^2\\
&\quad + B(u_1, u_2) \times (\xi_1 \times \xi_2) + \cdots\cdots + B(u_1,\\
&\qquad u_n) \times (\xi_1 \times \xi_n)\\
&\quad + Q(u_{2\times}\xi_2) + B(u_{2\times}\xi_2,\ u_{3\times}\xi_3 + \cdots\\
&\quad + u_{n\times}\xi_n) + Q(u_{3\times}\xi_3 + \cdots\cdots + u_{n\times}\xi_n)\\
&= \cdots\cdots\cdots\\
&= \sum_i Q(u_i) \times \xi_i^2\\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq n} B(u_i, u_j) \times \xi_i \times \xi_j
\end{aligned}$$

ここで

$$\alpha_{ii} = Q(u_i)$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = B(u_i, u_j) \times 2^{-1} \qquad (i<j)$$

とおくと

$$Q(u_{1\times}\xi_1 + \cdots\cdots + u_{n\times}\xi_n)$$

$$= \sum_{i,\ j} \alpha_{ij} \times \xi_i \times \xi_j$$

われわれは“ベクトルの長さ”の定式化を考える中で，2次形式の概念に到達した。それは，ベクトルxに対し“xの長さ”と読まれる

値の２乗を対応させる関数としての２次形式である。そこで翻って，線型空間に（非退化）２次形式が与えられていることを以って，“その空間ではベクトルの長さを考えることができる”ということにする。即ち，２次形式Qが線型空間（D, K）に与えられているとき，（D, K）に対し“Qを計量形式として随伴する計量線型空間”という言い方をする。

注意：計量線型空間のこの一般的定義では，ベクトル$\mathbf{x}\in D$の長さは定義されない。“長さの平方”が$Q(x)$として定義されるにとどまる。

（註）$B(x+x', y)$

$=2|x+x'||y|\cos\theta$,

$B(x, y)+B(x', y)$

$=2|x||y|\cos\tau+2|x'||y|\cos\tau'$

$=2(|x|\cos\tau+|x'|\cos\tau')|y|$.

このときθ，τ，τ'に対し

$|x+x'|\cos\theta=|x|\cos\tau+|x'|\cos\tau$

が成立するから，結局，$B(x+x', y)=B(x, y)+B(x', y)$。さらに，この結論と$B$の対称性から，$B(x, y+y')=B(x, y)+B(x, y')$。

3.4.3 内積

計量形式としての２次形式Qに随伴する双線型形式Bは，（計量形式Qに対する）内積と呼ばれる。

一方“内積”は，実線型空間（D, $\mathbb{R}$）に対しつぎの条件を満たす双線型形式　$\Phi: D\times D\longrightarrow\mathbb{R}$としても，定義される：

i) $\Phi(x, x)\geqq 0$かつ

$\Phi(x, x)=0 \Leftrightarrow x=0$

ii) $\Phi(x, y)=\Phi(y, x)$

この二つの“内積”は，ぴったり同じではない。少なくとも，計量線型空間の概念では，係数体が順序体であることは仮定されていない。

但し，実線型空間（D, $\mathbb{R}$）における第二の意味での内積Φに対し，

$$Q(x)=\Phi(x, x)\times 2^{-1}$$

で定義される$Q: D\longrightarrow\mathbb{R}$は計量形式となり(註1)，そして$\Phi$は$Q$に随伴する（第一の意味での）内積になっている(註2)。

また逆に，（D, $\mathbb{R}$）上の正値２次形式Qに対する内積Φは，第二の意味での内積になっている。

（註１）双線型形式Φに対する

$\phi: (x, y)\longmapsto\Phi(x, y)\times 2^{-1}$

は双線型形式。そして一般に，線型空間（D, K）における双線型形式ϕに対し

$Q(x)=\phi(x, x)$

で定義される$Q: D\longrightarrow K$は２次形式。

（註２）実際，$Q(x+y)-Q(x)-Q(y)=(\Phi(x+y, x+y)-\Phi(x, x)-\Phi(y, y))\times 2^{-1}=\Phi(x, y)$。

3.4.4 ベクトルの長さと方向

以下，計量線型空間として，計量形式Qが与えられている実線型空間（D, $\mathbb{R}$）を考える。

$x\in D$に対し“xの長さ”$|x|$を

$$|x|=\sqrt{Q(x)}$$

で定義する。

つぎに方向を，長さ１のベクトルのことと定義する(註)。

このとき，各ベクトルxは

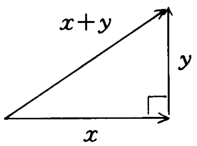
$$x=(x_{\times}|x|^{-1})_{\times}|x|$$

のように，方向と大きさに分解されることになる。ベクトルに対する“方向と大きさをもつ”の言い回しの理屈である。

計量形式Qの内積Bに対する

$$B(x, y)=0$$

は，$Q(x+y)=Q(x)+Q(y)$の場合である。そして平面における$Q(x)=|x|^2$の解釈では，$Q(x+y)=Q(x)+Q(y)$はxとyが直交すること（記号で$x\perp y$）を意味している。



$$|x+y|^2=|x|^2+|y|^2$$

そこで翻って，計量線型空間一般に対して$x\perp y$を$B(x, y)=0$で定義する。

（註）日常語の“方向”は，決して“長さ１のベクトル”ではない。日常語的な用法に即して“方向”を定式化しようとすれば，ベクトルの同値類として“方向”を導入することになる。実際，“長さ１のベクトル”は，この場合の〈方向＝同値類〉の代表元の意味をもっている。類の表現をそれの代表元で行なうというやり方は，数学ばかりではなく生活の中に頻繁に見出されるが，ここでの“方向＝長さ１のベクトル”の定義は，これである。

3.4.5 “標準的な基底”

ベクトル$x \in D$の長さを定義するのに，

《基底 $\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$ を任意に導入し，$x = u_{1\times}\xi_1 + \cdots\cdots + u_{n\times}\xi_n$ $(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_n \in K)$ と展開し，そして係数$\xi_1, \cdots\cdots, \xi_n$に対して或る一定の操作をする》

というやり方は，実践的には，とれない。選ぶ基底に依存して，計量に関するベクトル相互の関係（ベクトルの長さ，方向の関係）が変わってしまうからである。しかし一方，ベクトルの長さは，基底の係数に対する操作の形で定義される他ない。

こうしてわれわれの問題は，“標準的な基底”ということになる――但し，基底の要素間関係が標準的であり，《標準的な基底を別の標準的な基底に取り替えることが，（基底の係数に対する操作で定義される）ベクトルの大きさを変えることにならない》という意味で“標準的”。

3.4.6 計量の構成的定義の回避

“標準的な計量”の明示的定義は，明示的に定義されている“標準的な基底”に対してなされる。“標準的な計量”の明示的定義の前提は，“標準的な基底”が明示的に定義されていることである。

しかしまた，“標準的な基底”の“標準的”は，計量形式Qによって説明される他ない。

実際，われわれの“標準的な基底”は正規直交基底――“要素のベクトルの長さが１で，どの二つの要素も互いに直交している基底”――であり，それは“標準的な計量”Qに対し

条件：

(*)　$Q(u_i) = 1,\ B(u_i, u_j) = 0\ (i \neq j)$

を満たしている基底 $\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$ のことである。そして，“標準的な計量”Qは正規直交基底 $\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$ に対し

$$(\#)\qquad Q\left(\sum_i u_{i\times}\xi_i\right) = \sum_i \xi_i^2$$

で定義される(註)が，これは $\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$ の“正規直交”を説明する計量に他ならない。――実際，条件(*)は(#)を含意している。

計量の実践は，“標準的な基底”（“モノサシ”）の上で行なわれる。そして“標準的な基底”をつくるのも計量である。そこで，計量の構成的な記述は循環論法になる――特に，それは論理的な記述にならない。

そこで，循環論法を出現させないために“標準的な計量”と“標準的な基底”の概念を相互依存的なものとして同時に定義してしまうというのが，このときのテクニックになる。ここでは，“標準的な計量”，“標準的な基底”の内容にほおかむりすることで，論理が保たれている。

“標準的な計量”，“標準的な基底”は，実践的知識である。数学はこれを構成しない（できない）。

（註）この形式は，経験的ないし論理的事実としての“ピタゴラスの定理”の拡張。

3.5 ユークリッド計量ユークリッド空間

二つの基底 $\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$，$\{v_1, \cdots\cdots, v_n\}$ をともに“正規直交”として定める計量Qに対し，条件$\sum_i u_{i\times}\xi_i = \sum_i v_{i\times}\eta_i$は，$\sum_i \xi_i^2 = \sum_i \eta_i^2$を導く(註)。したがって，任意の計量$Q$は，これに関して正規直交である任意の基底 $\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$ に対して，

$$(*)\qquad Q\left(\sum_i u_{i\times}\xi_i\right) = \sum_i \xi_i^2$$

で与えられる。

特に，正規直交基底 $\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$ に対して(*)で定義されるわれわれの“標準的な計量” Qは，正規直交基底 $\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$ に依存していない。

ここで，“基底 $\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$ は計量Qに関して正規直交である”の言い換えとして，“計量Qは基底 $\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$ に関してユークッド計量である”の言い回しを導入する。

ユークッド計量は実践的知識であり，数学の中でこれを特権化することはできない。実際，任意の正値計量形式Qに対し，Qをユークッド計量とするような基底——即ち，Qに関して正規直交である基底——を構成することができる（Schmidtの直交化法)。そこで，“ユークッド計量線型空間”の概念を，単に“計量が或る基底に関するユークッド計量の形で導入されている計量線型空間”の意味で導入する。

さらに，ユークッド計量線型空間を随伴するアフィン空間を，ユークッド空間と呼ぶ。

われわれは，“（n 次元）ユークリッド空間”を，《“現空間”の数学的定式化》というわれわれの主題のここでのゴールということにする。

（註）　$v_i=\sum_j u_j \times \alpha_{ji}$　$(i=1, \cdots\cdots, n)$

とすると，$|v_i|=1$，$v_i \perp v_j=0$（$i \neq j$）より，

$$\sum_k \alpha_{ki}\alpha_{kj}=\delta_{ij} \quad (i,\ j=1, \cdots\cdots, n)$$

（δ_{ij}は“クロネッカのデルタ”）。さらに

$$\sum_i u_i \times \xi_i=\sum_i v_i \times \eta_i=\sum_i \left(\sum_j u_j \times \alpha_{ji}\right) \times \eta_i$$

$$=\sum_i u_i \times \left(\sum_j \alpha_{ij}\eta_j\right)$$

から

$$\xi_i=\sum_j \alpha_{ij}\eta_j \quad (i=1, \cdots\cdots, n)$$

したがって，

$$\sum_i \xi_i^2=\sum_i \left(\sum_j \alpha_{ij}\eta_j\right)^2=\sum_i \left(\sum_{j,k} \alpha_{ij}\alpha_{ik}\eta_j\eta_k\right)$$

$$=\sum_{j,k}\left(\sum_i \alpha_{ij}\alpha_{ik}\right)\eta_j\eta_k=\sum_{j,k}\delta_{jk}\eta_j\eta_k=\sum_i \eta_i^2.$$