

「数学理解の困難な理由について」

北海道教育大学岩見沢校

助教授 宮下英明

数学を学習者にわかりやすく指導しようとする者は、数学学習の難しさの理由を予め承知しておく必要がある。ここでは、数学学習の難しさの理由として、

1. フィクションとしての〈形〉が主題
 2. イメージとそれの記述（定式化）のギャップ
 3. シンボルの経験の多さ（シンボルへの意味圧縮の大きさ）
- の三つを取り上げる

1. フィクションとしての〈形〉が主題

数学科の主題は、モノ／コトに対するそれの形である。さらに、それを形とするものをもたないような形も、主題になり得る。

形は、われわれがつくりだす虚構（フィクション）である。モノ／コトに形が予め属しているわけではない（形はモノ／コトの属性ではない）。形は、モノ／コトにではなく、“見方”としてわれわれに属する。

モノ／コトにわたしが見た形はわたしの恣意である。しかし、いったん捉えられた形は論理的な対象であり、それに関する言明は論理（真偽の基準）に支配される。

フィクションの学習としての数学学習において、学習者は、恣意と必然の間を揺らぐ。この勝手を了解するのに学習者は苦労する。

〈形〉の学習

数学科の学習において、学習者は色々な〈形＝見方〉を知っていく。

形＝見方は、〈異なるモノに同じ形を見る〉と〈ひとつのモノに異なる見方をする〉の二つの分脈で並行して指導される。実際、形を一貫してひとの恣意（都合）として扱うとなれば、その指導はこのようになる。

また、形＝見方は、“そのように見えてしまう”（傾性＝〈カラダ〉）と“そのように見ようとする”（志向＝〈アタマ〉）の往復というプロセスで獲得され、またその往復運動の形態で所有されていく。

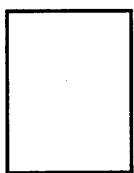
実際、新しい見方が自分のものになるためには、そのように見させない既存の見方（体質）を意識に上らせ、相対的なものとして対象化して自分から突き放すことを先ずしておかなければならない。その上で新しい見方に自らを訓練して、それをカラダに浸透させる。カラダに入るのは、〈慣れる〉ということ、それが何でもなくなるということである。（知識をアタマだけの事態と考える人が結構多いのであるが、この認識は全く誤っている。）しかし、この新しい体質も、やはり自己反省の形で、一つの見方として相対化して、突き放しておくれでなければならない。〈このように見えてしまっているのは、このように見ているからだ〉というように。これらはすべて、形を見方＝人為として、

ひとの恣意として、認識できるようになるためである。

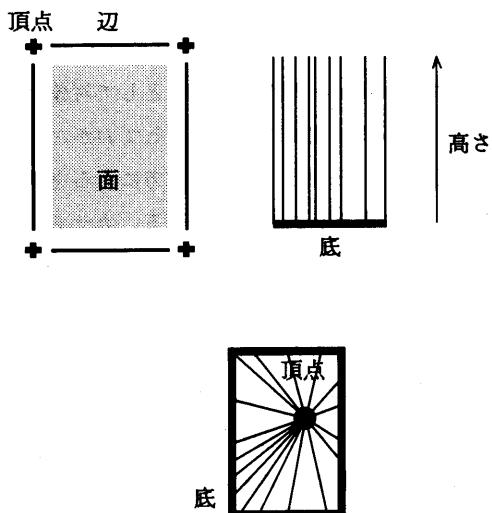
〈安定した落ち着き場所を示すことが指導〉というように考える立場があるとすれば、いま述べたのは、これと正反対のものである。ここでは、〈落ち着き場所はどこにもない〉という認識を植え付けようとする。その認識は、〈どこにも落ち着き場所がないからどこに身を置くことも自由〉という認識につながる。

例. 図形

図：



に対しては、つぎのような“単体複体”、“柱”、“錐”的ような見方ができる：



例. 量

(1) 現像としての量

量も、“形”としてわれわれに属するものの一つである。量とは量形式のことである。素材に対してわれわれは色々な“形”を意識することができます。そして、そのような形のうちの一つに“量”がある。

この意味で、量は人に属する。〈量という存在が既にあり、その本質として量形式が抽出される〉というのではない。量は量形式の原因ではなく結果である。素材に量形式を投げかけることがその素材に対する“量”的意識である。量とは、量形式で映し出された素材の像（幻像）である。

例えば“長さ”は、“机のへりをものさしで測る”、“机の二つのへりに長さの比を読む”、といった実践の形式で映し出される机の像である。

そこで、“量”を定義するとは、〈人の実践形式としての量形式〉を定義することである。

わたしは、〈この実践形式は、徹頭徹尾“数”的使用形式である〉と考える。特に、量の性格は、使用する数（自然数、整数、……、複素数、四元数、等々）によって決定される。例えば、

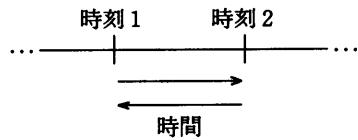
“長さ”は、係数として使用する数（通常、実数）が稠密でありアルキメデスの公理を満たす故に、稠密でありアルキメデスの公理を満たすのである。

(2) 量の系、位の系

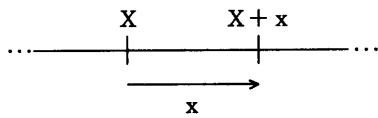
量とは数の一つの使用形式である。素材に対する数の照射で、量という像が浮かび上がる。この意味で、量は数の後にやって来る。

数の使用形式としてのこの量形式を直接述べる前に、どのように考えられているものがわれわれにとって“量”になるのかを、見ておこう。例にひくのは、時刻・時間である。

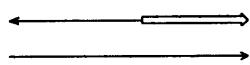
時刻と時間はそれぞれ“位”と“変位”として互いにつながっている：



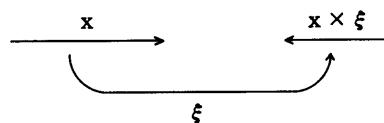
特に、時刻に対しては時間による“平行移動（併進）”の作用₊の概念が立つ



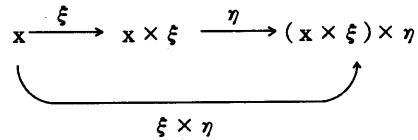
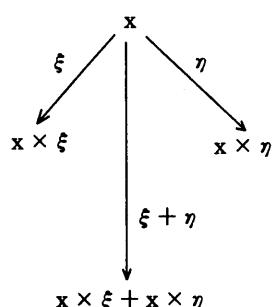
そして、移動の和として時間の加法+が意味づく：



また、時間に対しては数の倍作用_×の概念が立つ：

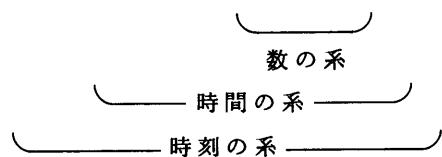


そして、倍の和、倍の合成として数の加法+、乗法×が意味づく：



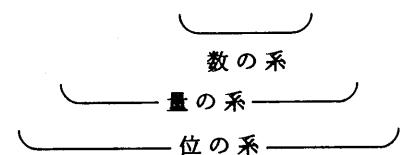
こうして、時刻、時間、数はつぎのような系をなしていると見ることができる：

(時刻、((時間、+)、(数、+、×)、×)、+)



この形式は、時刻・時間の他にも見出すことができる。例えば、直線上の点と二点間距離、高さとその差、というように。いまこれを

(S, ((Q, +), (N, +, ×), ×), +)



のように捉える。(この“位・量・数”的区別は、高校数学では“点・ベクトル・スカラ”的区別につながる。) —ここで

- (1) S、Q、Nの要素の区別
- (2) Qの+、Nの+、作用の₊の区別
- (3) Nの×と作用の_×の区別

に注意すること。

(3) 量形式

上に述べた“量の系・位の系”は、われわれの〈読み〉としてのみ存在している。“量の系・位の系”的読みの端緒になる素材はあるが、それらは“量”や“位”ではない。

そしてさらに、数の系しかないのである。
(しかも数の系は、われわれの実践の上にある。
われわれから独立に存在しているわけではない。
誤解をおそれずに言えば、われわれの実践のみ
が存在するものなのである。)

実際、量の系および位の系

$$((Q, +), (N, +, \times), \times)$$

$$(S, ((Q, +), (N, +, \times), \times), +)$$

とは、数の系 $(N, +, \times)$ から導かれる系

$$((N, +), (N, +, \times), \times)$$

$$(*) \quad (N, ((N, +), (N, +, \times), \times), +)$$

と二重写しに見られたもののことなのである。

量というものがあるわけではない。存在して
いるのは〈計数〉とか〈測定〉とかのわれわれ
の実践であり、この実践の上に量が読まれるわ
けである。そして〈計数〉および〈測定〉とは、
形式 (*) が実現される実践のことに他ならな
いのである。

ひとの一般の傾向として、行為に存在の影を
見たがることがある。そしてこれが計数
や測定の場合にも起こる。即ち、ひとはこの行
為に量や位という存在を見るのである。これが
量の系、位の系の実態である。繰り返すが、形
式 (*) こそが——実践の形式として——實在
しているところのものである。量の系、位の系
は、この実践形式を存在に読み換えたものに過
ぎない。

(4) 数の系

われわれはいくつかの異なる系（自然数の系、
整数の系、……、複素数の系、四元数の系……）
を一様に“数の系”としている。では、“数の
系”的規準は何であろうか。規準としてわれわ
れが求めるものは、数の使用——特に、量処理
における数使用——

の根柢となるようなものでなければならない。

この立場から、わたしは、集合 N とその上の

二つの内算法 $+$ 、 \times でなる系 $(N, +, \times)$ で
つきの条件を満たすものを“数の系”と考えて
いる：

(1) $+$ は結合的かつ可換。

(2) \times は結合的で、単位元 $1 \in N^*$ が存在す
る。

(3) $+$ と \times の間に左右分配法則が成り立つ：

$$\xi \times (\eta + \zeta) = \xi \times \eta + \xi \times \zeta$$

$$(\eta + \zeta) \times \xi = \eta \times \xi + \zeta \times \xi$$

(4) 各要素は、 $+$ に関して可約；即ち、

$$\xi + \eta = \xi + \zeta = \eta = \zeta$$

(5) N^* の各要素は、 \times に関して左右可約；
即ち、

$$\xi \in N^* \text{ に対し},$$

$$\xi \times \eta = \xi \times \zeta \Rightarrow \eta = \zeta$$

$$\eta \times \xi = \zeta \times \xi \Rightarrow \eta = \zeta$$

(6) 任意の要素を ξ 、 η に対し、要素 ζ で、
 $\xi + \zeta = \eta$ かつ $\xi = \eta + \zeta$ となるものが存在
する。

ここで、 N^* は、 N が零元 0 —— $+$ に関する中
立元——をもつときは $N \setminus \{0\}$ 、そうでない
ときは N 自身。

単位元 1 の存在と条件(4)、(5)は、“数使用”
の観点から要請される。 $(N, +)$ が群のとき
(4)は満たされている。また (N^*, \times) が群の
とき(5)は満たされている。また、 \times が可換のと
き、(3)の条件式は第一式のみでよい。

また、 $\xi + \xi = \xi$ が成り立てば ξ は零元であ
る（確かめられよ）。

2. イメージとそれの記述（定式化）の ギャップ

数学は、合理主義的な機能性／経済性を一層
強化するという方向に形態進化してきた。

この進化には、機能性／経済性（コンパクト
で、確実で、速い）という性能上の進化と、明

証性／厳密性（誤解されない、バグが発見されやすい）というコミュニケーション上の進化の二面がある。そしてこのような進化が文字メディアの上に達成されてきた。

しかし、数学活動は文字操作であるわけではない。数学活動を生成的に導いているものは、感覚的／身体的／実践的なイメージである。

数学を理解するとは、生成の核であるこのようなイメージを自分のものにすることである。しかし、学習者に数学が課せられるときには、文字テクストが数学の形態になっている。

学習者は、文字テクストの向こうに、これの生成の核になっているイメージをつかまなければならない。しかし、文字テクストからの元のイメージの再現は、容易なことではない。実際、イメージを既に持っている者のみが、文字からイメージを再現できるのである。

例. “自然数”とペアノの公理

“自然数”的定義は日常語で謂う“系列”的数学的定式化であり、それはつぎのような形でなされる

（“ペアノの公理”）：

自然数（の系）とは、集合Eと、Eの一つの要素1と、関数 $f : E \rightarrow E$ の組

(E, 1, f)

であって、以下のことが成り立っているもののこと：

1° $f(x) = 1$ となるEの要素xは存在しない

2° Eの要素x, yに対し、 $f(x) = f(y)$ ならば $x = y$

3° Eの部分集合 E' は、つぎの条件を満たすとき、じつは E と一致している：

1が E' の要素になっている

xが E' の要素のとき、 $f(x)$ も E' の要素

この“ペアノ公理”で定式化しようとしているものは、まったく単純なものである。それは、図式

$$\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \dots$$

である。——ことばで言うと、

はじめ、はじめのつぎ、

はじめのつぎのつぎ、……

である。

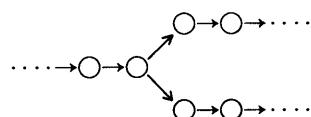
“ペアノの公理”がこの図式の定式化になっていることを確かめるとしよう。

先ず、系列の図式

$$\circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \dots$$

に対し、この項全体の集合が集合Eであり、そして先頭の項が1である。fは、各項にその直後の項を対応させる関数である。

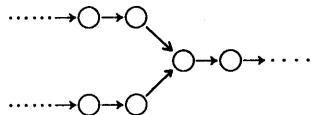
fが対応一般（一つの要素に複数の要素が対応することを許す）ではなく、一意対応（一つの要素に一つの要素が、しかもただ一つの要素が、対応する）としての関数であるということは、つぎのことに効いている。即ち、系列の図式は、



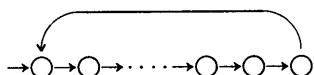
のように枝分かれするものではないが、この枝分れを禁止するのが、fが一意対応であるという条件である。

“何の後でもない”が“先頭”的意味である。そこで、条件1°によって、1を先頭として定義している。

さらに、条件2°によって



の形が禁止される。そしてこのことはまた、系列は無限に続かねばならないことを導く。実際、無限に続かないとはループを含むことであるが、ループの形状



には、上の枝分かれの形が含まれる。

そこで最後の可能性として残るのは、 E が互いに独立した複数の系列で成るという状態である。しかしこの状態は、条件 3° によって禁止される。実際、

$$E \left\{ \begin{array}{l} ① \rightarrow \circlearrowleft \rightarrow \cdots \\ \cdots \cdots \\ \circlearrowleft \rightarrow \circlearrowleft \rightarrow \cdots \end{array} \right. : E$$

のように E' をとると、 E' は 3° の中の E' の条件を満たしているから $E' = E$ でなければならぬ。結局、 E は一本の系列でなければならぬことになる。

3. シンボルの経歴の多さ（シンボルへの意味圧縮の大きさ）

数学の個々のシンボル／語彙は、結果的に、非常に多くの意味を圧縮したものになっている。シンボル／語彙を正しく使えるためには、それの導入にまで至る経過——約束や定義や命題の連なり——を知っていなければならない。数学のシンボル／語彙の意味遷行で、学習者はそれの深さ、広がりに圧縮されてしまう。

例. 分数

分数は、量に対する倍作用素ないし量の係数として導入される。即ち、分数の系 $(N, +, \times)$ からは量形式 $((N, +), (N, +, \times), \times)$ が導かれ、そしてこれと同型な量の係 $((Q, +), (N, +, \times), \times)$ ——“長さ”“容積”、等々——が考えられることになるが、分数の系 $(N, +, \times)$ は量の系 $((Q, +), (N, +, \times), \times)$ の導入という形で導入される。

系 $((Q, +), (N, +, \times), \times)$ が、 $((N, +), (N, +, \times), \times)$ と同型であるということのうちには、 Q の $+$ に関する交換、結合法則の他に、つぎの“等分可能性”的含意がある：

任意の $y \in Q$ と、自然数 n に対し、 n 回の累加が y に等しくなるような $x \in Q$ が存在する。通常、われわれはこのような x を、あまり適切ではないが、簡単に “ y の n 等分” と読んでいい。また、これも適切な言い方ではないが、 y を “ x の n 個分” と呼んだりする。

“ x の n 個分” は、自然数の系 $(M, +, \times)$ を分数の系 $(N, +, \times)$ に埋め込んで考えているときに、 $x \times n$ で表される。また、“ y の n 等分” は $y \times n_{-1}$ で表わされる。そこで、 y が x の n 回の累加であることは、

$$y = x \times n \quad \text{あるいは} \quad y \times n_{-1} = x$$

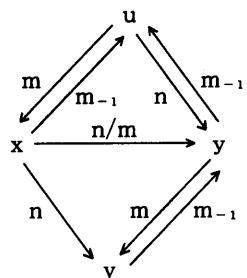
で表わされることになる。

さて、 Q の二要素 x 、 y と自然数 m 、 n に関するつぎの条件は互いに同値である：

- (1) $x = u \times m$ 、 $y = u \times n$ となる $u \in Q$ がある
- (2) $x \times n = v$ 、 $y \times m = v$ となる $v \in Q$ がある
- (3) $x \times m_{-1} = y \times n_{-1}$
- (4) $x \times n = y \times m$
- (5) $(x \times m_{-1}) \times n = y$
- (6) $(x \times n) \times m_{-1} = y$

$$(7) \quad x \times n / m = y$$

一つの図式にまとめると、つぎのようになる：



そしてこれが、分数 n/m の導入の形式になる。

系 $((Q, +), (N, +, \times), \times)$ を文脈とする分数の乗法は、倍関係の合成の意味になる。即ち、
 $x \in$

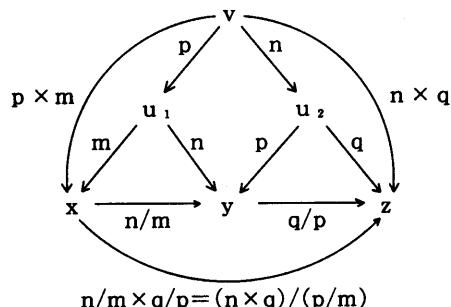
$Q, \xi, \eta \in N$ の上の関係：

$$(x \times \xi) \times \eta = x \times (\xi \times \eta)$$

で定義される。そして乗法の公式

$$n/m \times q/p = (n \times q)/(m \times p)$$

は、この定義の含意である。実際、



ここで、 u_1 と u_2 を共約する要素 v がとれることは、系 $((Q, +), (N, +, \times), \times)$ の含意である。

また、 $n/m \div q/p$ の意味は “ q/p と掛けると n/m になる分数” である。これは $n/m \times (q/p)^{-1}$ であるが、ここで $(q/p)^{-1} = p/q$ 。そこで、 $n/m \div q/p = n/m \times$

p/q となる。そして乗法の公式が既習ならば、さらに $= (n \times p)/(m \times q)$ を得る。

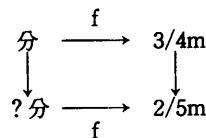
例. 比例関係

つぎの問題を解くために必要な知識を確認するとしてよい：

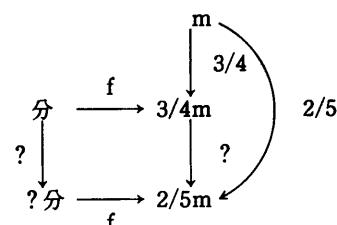
“毎分 $3/4m$ の速度で $2/5m$ 進むのに何分かかるか？”

先ず、この問題の構図が比例関係

$f : \text{時間} \rightarrow \text{距離}$
 に関する



であること——ここで下向きの矢線は同じ倍一を、読み取れねばならない。そしてこれから図式を導き、そして ? が $<3/4$ と掛けると $2/5$ になる数であること（言い換えると、 $? = 2/5 \div 3/4 = 2/5 \times (3/4)^{-1}$ 、 $(3/4)^{-1} = 4/3$ 、 $2/5 \times 4/3 = (2 \times 4)/(5 \times 3)$ を知っていることで、 $? = (2 \times 4)/(5 \times 3)$ を得る。



例. 行列

高校数学で主題になる “一次変換” と “行列” は、前者の表現が後者であるという関係にある。しかも、“一次変換（線型写像）”が “比例関数” の概念の拡張であるのに対応して、“表現行列”

は、“比例定数”の概念の拡張である。

実際、“比例関数”は“1次元線型空間から1次元線型空間への線型写像”となり、その表現行列は (1×1) 行列になるが、この行列の（唯一の）要素が“比例定数”である。

行列がわかるとは、これらの経緯がわかるということである。

(1) 比例関数の表現——“比例定数”

$((Q_1, +), (N, +, \times), \cdot, ((Q_2, +), (N, +, \times), \cdot))$ \times を量の系とし、 u_i を Q_i の単位とする $(i = 1, 2)$ 。

このとき、比例関数 $f : Q_1 \rightarrow Q_2$ は、 Q_i の単位 u_i ($i = 1, 2$) に対する関係：

$$f(u_i) = u_2 \alpha$$

（“単位あたり量”）で決ってしまう——実際、 $f : u_1 \times \xi \rightarrow u_2 (\xi \times \alpha)$ ($\xi \in N$) である。そこで特に、 α は f の表現になる。 α の意義は $(Q_1$ の単位 u_1, Q_2 と u_2 の単位 u_2 に関する) f の表現数”であるが、この意義に対する伝統的な言い回しが“比例定数”である。

α が f の表現であるということを、つぎのように説明することもできる。

関数 \bar{f} ：

$$N \rightarrow N;$$

$$\xi \rightarrow \xi \times \alpha$$

に対しつぎの図式が可換となる——ここで u_i * は、 Q_i の要素に単位 u_i に対するこれの（測定）値を対応させる関数：

$$\begin{array}{ccc} Q_1 & \xrightarrow{f} & Q_2 \\ u_{1*} \downarrow & & \downarrow u_{2*} \\ N & \xrightarrow{\bar{f}} & N \end{array}$$

この意味では \bar{f} は f の表現になるが、さらに $\bar{f} = \alpha$ 倍の倍関数——に対しては α がこれの表

現になる。

算数科で“一方が2倍、3倍、……になると他方も2倍、3倍、……になる関係”—— $f(x \times \xi) = f(x) \times \xi$ ——として指導された“比例関数”が中学校では“ $y = ax$ ”に変わってしまうが、比例関数 f に対する \bar{f} が“ $y = ax$ ”の正体である。

(2) “一次変換”的概念

高校数学の“一次変換”は、“比例関数”的概念の拡張である。

“比例関数”的“一次変換”への拡張は、次元の一般化である。そして、“一次変換”へと引き継ぐものは、比例関数の形式としての

$$f(x \times \xi) = f(x) \times \xi \text{ (註)}$$

と、比例関数の価値としての

〈単位の写る先がわかれれば全ての要素の写る先がわかる〉

である。

次元の一般化で、“単位”は、“基底”的概念へと拡張される。そこで、価値の方は、

〈基底の写る先がわかれれば全ての要素の写る先がわかる〉

のようになる。しかしこの価値の実現のためには、

形式

$$f(x \times \xi) = f(x) \times \xi$$

だけでは足りない。この事態は、形式

$$f(x \times y) = f(x) + f(y)$$

を加えることで解決される。実際、この手続きは、“一次変換”を比例関数に対して別モノ化するものではない。何故なら比例関数の場合、“ $f(x+y) = f(x)+f(y)$ ”は“ $f(x \times \xi) = f(x) \times \xi$ ”の含意になっているからである（確かめられよ）。

こうして、“比例関数”的拡張としての“一次変換”は、条件

$$f(x \times \xi) = f(x) \times \xi$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

を満たす写像 f として定義されることになる。

(註) 小学校算数では、これを“一方が2倍、3倍、……になるときはもう一方も2倍、3倍、……になる”という言い回しで指導している。

(3) 一次変換の行列表現

$(u_1, u_2), (v_1, v_2)$ がそれぞれ空間 D 、 D' の基底であるとき、一次変換 $f : D \rightarrow D'$ は

$$f(u_i) \quad (i=1, 2)$$

で決ってしまう(註)。よって、

$$f(u_i) = v_1 \times \alpha_{ii} + v_2 \times \alpha_{i2} \quad (i=1, 2)$$

のように表わすと、係数

$$\alpha_{ij} \quad (i=1, 2; j=1, 2)$$

が f を決定するものになる。そこで、係数 α_{ij} の組を

行列

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

の形に書いて、これを f の表現——“表現行列”

として用いるというアイデアが出てくる。

(註) 実際、 D の元は $u_1 \times \xi_1 + u_2 \times \xi_2$ の形に書けて、さらに線型写像の条件から $f(u_1 \times \xi_1 + u_2 \times \xi_2) = f(u_1) \times \xi_1 + f(u_2) \times \xi_2$

として用いるというアイデアが出てくる。

(4) 表現行列を用いた計算

一次変換 $f : D \rightarrow D'$ に対し、空間 D 、 D' のそれぞれに、基底 $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$ を導入する。そしてこれに対する f の表現行列を

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 D の要素

$$x = u_1 \times \xi_1 + u_2 \times \xi_2$$

に対し、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(u_1 \times \xi_1 + u_2 \times \xi_2) \\ &= v_1(\xi_1 \times \alpha_{11} + \xi_2 \times \alpha_{21}) \\ &\quad + v_2(\xi_1 \times \alpha_{12} + \xi_2 \times \alpha_{22}) \end{aligned}$$

したがって、 $f(x)$ が、 x を表わす行ベクトルに f の表現行列を右から作用させる計算(周知のもの)によって、求められることになる。

つぎに、 D'' をもう一つの空間として、 f と一次変換 $g : D \rightarrow D''$ の合成を考える。

空間 D'' に、基底 (w_1, w_2) を導入する。基底 $(v_1, v_2), (w_1, w_2)$ に対する g の表現行列を

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$$

とするとき、

$$\begin{aligned} g(f(u_i)) &= g(v_1 \times \alpha_{ii} + v_2 \times \alpha_{i2}) \\ &= (w_1 \times \beta_{11} + w_2 \times \beta_{12}) \times \alpha_{ii} \\ &\quad + (w_1 \times \beta_{21} + w_2 \times \beta_{22}) \times \alpha_{i2} \\ &= w_1 \times (\alpha_{ii} \times \beta_{11} + \alpha_{i2} \times \beta_{21}) \\ &\quad + w_2 \times (\alpha_{ii} \times \beta_{12} + \alpha_{i2} \times \beta_{22}) \end{aligned}$$

そこで f と g の合成の表現行列を

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$r_{ij} = \alpha_{ii} \times \beta_{1j} + \alpha_{i2} \times \beta_{2j} \quad (i=1, 2; j=1, 2)$$

よって一次変換の合成が、表現行列の積(周知のもの)で計算できることになる。

なお、行列の和の方は一次変換の和に応じて

〈主な質疑応答〉

清野（北星女子）：大学の数学の授業はよくわからないという学生が多い。大学の先生にも問題があるのではないか。

宮下：確かに大学の先生が難しくしている面がある。教材は映像化すれば打開できる。これからは教材そのものも変わってゆくだろう。入試のシステムもがらりと変わること思う。

林（蒂広北）：一般の為の数学も必要になってきている。その点の見通しはいかがでしょう。

宮下：毎日がディズニーランドの様であればよいと思う。さしたっては音も含めて総合的な映像画が必要だと思う。頭の中に映像化があるかどうかが理解する為のポイントだと思う。