寄　稿

量計算の数学

宮　下　英　明 **

要　約

学校数学の歴史には「数は量の比」対「数は量の抽象」の選択肢の立った時があった。そして学校数学は「数は量の抽象」の方を択った。以降「数は量の抽象」が専らになる。「量・数」の数学は「数は量の比」であるが，これの方は世代的に忘却されるふうになる。

「数は量の抽象」は＜量→数＞の写像論であり，現行の「量の問題を解く」は写像論で推論を跳び越える。「数は量の比」を世代忘却から守る一環として，「問題の論理的還元」の形が改めて想起されるようにする必要がある。

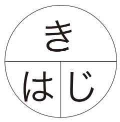
キーワード：「数は量の比」，「数は量の抽象」，量計算，問題の還元

0. はじめに

数学は，量の問題を数の問題に還元して解く。数の問題に還元するには，何段かの論理的ステップを踏む。この論理的還元の概念が無かったり希薄であるとき，ひとは，量の問題から数の問題への移行をワン・ステップでやろうとする。問題のパターンを求め，このパターンの問題に対して使うべしと習った公式を適用する。

量の問題から数の問題への移行をワン・ステップでやるやり方は，＜もの→ことば＞の写像論のように＜量→数＞の写像論を立てる論によって，合理化される。「数は量の抽象」は，このような論である。公式適用の問題解答は，「数は量の抽象」の立場と相性がよい。

量の問題を数の問題に還元する数学は，「数は量の比」である。しかし，学校数学は「数は量の抽象」の方を択っている。長方形の求積の問題解答を生徒に教えるのに，教師は「タテ × ヨコ＝面積」であると教える。速さ・時間・距離の問題解答を生徒に教えるのに，教師は「速さ＝距離 ÷ 時間 (距離＝速さ × 時間，時間＝距離 ÷ 速さ)」であると教える。わたしの周りの学生などは，時間・距離・速さの問題を解くときはつぎの「公式」を使うようにと習ってきている：



＜量→数＞の写像論は，端的に間違いである。これを貫徹しようとすれば，その都度現れる論理的矛盾に対してこれを糊塗する理屈をつくりださねばならない。こうして，「数は量の抽象」は保持しようとすればするほど，モンスター理論化する。

数学教育は，「数学から見た学校数学」の視点を重要なものとする。学校数学は数学と同じものではないが，数学から学校数学を見ることで，学

* 平成 21 年 5 月 27 日受付，平成 21 年 6 月 26 日決定
** 北海道教育大学教授

校数学が使っている「嘘も方便」が捉えられ，そして「嘘も方便」の通用期間や,「嘘も方便」を使った報いがどのように返ってくるかということが，捉えられる。

学校数学の「数は量の抽象」を見る数学は,「数は量の比」である。しかし，「数は量の比」は，いつも，世代的に忘却される体 (てい) にある。

学校数学の歴史には，「数は量の比」対「数は量の抽象」の選択肢の立った時があった。 学校数学は「数は量の抽象」を択り，それからほぼ半世紀経つ。「数は量の抽象」を忘却させないためには，折に触れ，これの想起に努めねばならない。本論考はこれの一端を担おうとするものである。

1.「数は量の比」と「数は量の抽象」

「数は量の比」は，線型空間や加群 (module) の話に慣れている者なら「*数と量の関係は，スカラとベクトルの関係のようなもの*」の言い方で了解できる内容である。「量」の語を使ってはいても，それは数学的な形式の話になる。「数は量の比」とはいっても，数より先に量があるのではない。形式としての量は，数を素材にして定義される。数の方が量より先にくるのである ([2, §「量としての数」: 量の普遍対象])。

一方,「数は量の抽象」は，実体概念として量を立てるところから論を起こす。そして，数は量の抽象であるとする。そして，つぎのような論を展開していく：

「数は抽象，量は具体」
「量には内包量と外延量がある」
「数の積は量の積の抽象」
「割り算には等分除と包含除がある」
「形式不易の原理」
「1 と見る」

2. 数学は「数は量の比」, 学校数学は「数は量の抽象」

「数は量の比」は，数学である。すなわち，一つの数学的体系を成す。「数は量の比」の学習は，数学の学習である。

学校数学は，「数は量の抽象」を択る。「数は量の抽象」は，数学的には没論理であるが,「数は量の比」と比べたときに内容がやさしく感じられる。生活感覚に近いのである。教育現場にも ,「数は量の抽象」の方がすんなり入る。「数は量の比」と「数は量の抽象」のうち学校数学が「数は量の抽象」の方を択ったのは，いわば必然であった。

しかし,「内容がやさしく感じられる」は,「教授 / 学習がやさしくて済む」ということではない。没論理を数学として教えれば，内容は当然混乱したものになる。数の概念，数の算法，量計算の指導をわけのわからないものにしてしまう：

- (複素数にまで通底する) 数の意味，＋，× の意味を示せない。
- 数 × 数で, 前と後ろの数を別様に解釈する。
- 分数 × 分数を，分数 × 整数，分数 ÷ 整数，整数 × 分数，分数 × 分数のステップにわける。
- 正負の数の積を説明できない。
- 物の結合を「量の和」にして，これの抽象を数の＋にしているので,「内包量･外延量」の似非概念がもうけられる。
- 時間・距離・速さの問題を,「速さ × 時間＝距離」の問題だと思う──比例関係の問題として論理的に解くことができない。
- 長方形の求積の問題を,「長さ × 長さ＝面積」の問題だと思う──複比例関係の問題として論理的に解くことができない。
- 数を量で解釈するので，自然数の割り算に「等分除と包含除」の区別 (似非概念) がもうけられる。

  等々

3.「数は量の比」の世代忘却

学校数学が (「数は量の比」ではなく)「数は量の抽象」の方を択り，これを専らにするようになってから, ほぼ半世紀が経った。「数は量の抽象」が専らになったところから教員・学生を始める者には,「数は量の抽象」がすべてになる。こうして「数は量の比」は，世代的に忘却される。

「数は量の抽象」を所与にした者は，これを数学にする。一方，数学は「数は量の比」の方にある。「数は量の比」の世代忘却は，学校数学が数学を知らずに過ごしているという状態である。

世代的に忘却された「数は量の比」は，思い起

こされる必要がある。

4. 量計算の数学（量の問題の数学的還元）の想起

数学の場合，問題を解くとは，論理に則って問題の還元（簡約化）を進めることである。実際, このとき行き着いたもっとも簡約された形が,「解」になる。

問題が複雑になれば，還元のステップ数が多くなる。適用される定義・命題も多くなる。量の問題を「還元」の形で解けるためには,「量・数」の数学がきちんと押さえられていることが必要になる。「量・数」の数学をやっていなければ，解を求めることを数学として行うことはできない。

現行は,「量・数」の数学をやらない。では，現行は,「量の問題を解く」をどのようにやっているのか？現行は,「公式」「形式不易の原理」の適用でやっている。「公式」「形式不易の原理」を使うことで，推論を跳び越える。「公式」でいうと,「長さ × 長さ＝面積」「距離 ÷ 速さ＝時間」の類をそのまま教える。(「×・÷」は数に対して用いる記号であり, これは「×･÷」の誤用である。しかし，現行は「数は量の抽象」の立場に立っているので，誤用とは思わない。)

学校数学は数学とは違う。したがって,「量の問題を解く」が数学としてやられていないから「ダメ」ということにはならない。「量の問題を解く」が数学としてやられていないことが問題になるのは，これによって困ったことが起こってしまう場合である。そして，実際，困ったことが起こってしまう。

先ず,「量の問題を解く」を数学にしないやり方は，長くはもたない。早晩，苦しくなる。――小学算数であれば，特に分数の積・商が入ってくるところ。

つぎに,「量の問題を解く」を数学としてやらないとは，これを数学としてやるカラダがずっとつくられないということである。数学をするカラダがつくられないのは，教員も同じである。

しかし, 学校教員にとって,「論理」は高いハードルである。論理を知り論理を運用することはカラダのものであり，そしてこのカラダの形成が容易でない。量の問題を解くときの論理は，それほど難しい内容ではないが，人のカラダは「論理」に抵抗するものように見える。

註：論理を指導されるわけではないのに，人は高度に論理の運用ができる。 これは，人の使うことばが，＜論理の高度な運用を自ずと実現するもの＞のようにできあがっているからである。

「論理」を苦手とするとき，ひとは結果先取りに向かう。すなわち「できる」に向かう。問題解決では，問題の論理的還元ではなく，問題の見掛け（パターン）に対応する方を択ぶ。教員もこれをやってしまう――無意識に。

「公式」「形式不易の原理」を使えば，推論を跳び越えられる。「数は量の抽象」は，これを逆用する格好になっている。すなわち,「公式」「形式不易の原理」の適用を合理化する理論になっている。

「数は量の抽象」は, ＜量→数＞の写像論である。量の問題に対しては，これに応ずる数式があることになる。両者の関係は「写像」であるから,「問題の論理的還元」という主題は発生しない。特に，この理論は推論を封じるものになる。

写像論と「問題の論理的還元」の二つを示されると，ひとは写像論の方を択んでしまう。一見，簡単であるからだ。実際，速さの問題は，速さの公式を使わせれば小学生も答えを出せるようになる。一方,「問題の論理的還元」の方は，大学生でも難しい。量の問題を数の問題にかえて解く場合，論理を厳格に適用して問題の還元のステップを一つ一つ踏むのと，ワン・ステップでやってしまうのとでは，後者の方が自ずと択ばれてくる。

学校数学は,「数は量の抽象」を長くやってきた。「数は量の抽象」で教えられた生徒が教員になり，その教員が「数は量の抽象」を教える。これが繰り返されていまは,「量の問題を解く」が数学であるということ，その数学の形は「問題の論理的還元」であるということも，知られなくなっている。したがって，数学教育に携わる者は，自分の役割として，この状況を指摘しつつ,「量の問題を解く」の数学の形であるところの「問題の論理的還元」を改めて示していく必要がある。

5. 例：「6÷ 3」の立式

「問題の還元」がどのようなものであるかを，ここで確認する。——例として，「6÷ 3」の立式に至る問題を５つ取り上げ，それぞれの「6÷ 3」への還元プロセスを示す。

(1)「6÷ 3」の立式に至る問題の最終還元形

「6÷ 3」の意味は，つぎのようになる：

$$3 \times \square \ = \ \square \times 3 \ = \ 6$$

「6 ÷ 3」

また，「3×□」「□ × 3」の意味は，つぎのようになる：

$$\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "3\times\square"'] & 量_b \arrow[r, "\square"] & 量_c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "\square"] \arrow[rr, bend right, "\square\times 3"'] & 量_b \arrow[r, "3"] & 量_c \end{tikzcd}$$

そこで，つぎが「6÷ 3」の立式に至る問題の最終還元形である：

$$\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 量_b \arrow[r, "\square"] & 量_c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "\square"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 量_b \arrow[r, "3"] & 量_c \end{tikzcd}$$

(2)「6ｍのひもを３本に等分すると，１本何ｍ？」

数式への還元のステップが，つぎのようになる：

問題	何mの3倍が6mか?
問題を図式化	$何m \xrightarrow{3} 6m$
「何m」「6m」を分析	$\begin{tikzcd} m \arrow[r, "何"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 何m \arrow[r, "3"] & 6m \end{tikzcd}$
「×」の文法	$\begin{tikzcd} m \arrow[r, "何"] \arrow[rr, bend right, "何\times 3\ =6"'] & 何m \arrow[r, "3"] & 6m \end{tikzcd}$
「÷」の文法	何＝6÷3

(3)「6ｍのひもを何本に等分すると，１本３ｍ？」

数式への還元のステップが，つぎのようになる：

問題	3mの何倍が6mか?
問題を図式化	$3m \xrightarrow{何} 6m$
「3m」「6m」を分析	$\begin{tikzcd} m \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 3m \arrow[r, "何"] & 6m \end{tikzcd}$
「×」の文法	$\begin{tikzcd} m \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "3\ \times 何=6"'] & 3m \arrow[r, "何"] & 6m \end{tikzcd}$
「÷」の文法	何＝6÷3

(4)「１ヤードは３フィート。６フィートは何ヤード？」

数式への還元のステップが，つぎのようになる：

問題	ヤードの何倍が6フィートか?
問題を図式化	$ヤード \xrightarrow{何} 6フィート$

「6フィート」 「ヤード」 を分析	フット $\xrightarrow{3}$ ヤード $\xrightarrow{何}$ 6フィート 6
「×」の文法	フット $\xrightarrow{3}$ ヤード $\xrightarrow{何}$ 6フィート 3 × 何 = 6
「÷」の文法	何＝6÷3

(5)「面積が 6 cm^2，タテの長さ 3 cm の長方形のヨコの長さは？」

ここでは，つぎのことを使う：

(＊)「隣り合う 2 辺の一方の辺の長さを固定したとき，他方の辺の長さと面積は比例関係にある。」

問題	タテの長さ3cm とヨコの長さ 何cm で，面積が6cm^2 か?
問題を 図式化 「何cm」 を分析	cm $\xrightarrow{何}$ 6cm^2 (3cm × 何cm)
(＊) を適用	3cm × cm $\xrightarrow{何}$ 6cm^2 (3cm × 何cm)
	cm × cm $\xrightarrow{3}$ 3cm × cm $\xrightarrow{何}$ 6cm^2 (3cm × 何cm)

「6cm^2」 を分析	cm × cm $\xrightarrow{3}$ 3cm × cm $\xrightarrow{何}$ 6cm^2 (3cm × 何cm) 6
「×」の文法	cm × cm $\xrightarrow{3}$ 3cm × cm $\xrightarrow{何}$ 6cm^2 (3cm × 何cm) 3 × 何 ＝ 6
「÷」の文法	何＝6÷3

(6)「3 km/h では 6 km 進むのに要する時間は？」

数式への還元のステップが, つぎのようになる：

問題	3km/h では, 何hで6km か?
問題を 図式化	比例関係 時間 → 距離 h → 3km
	比例関係 時間 → 距離 h → 3km 何h → 6km
「何h」 を分析	比例関係 時間 → 距離 h → 3km 何 ↓ 何h → 6km

「比例関係」の適用	$\begin{array}{ccc} \text{時間} & \text{比例関係} & \text{距離} \\ h & \longrightarrow & 3km \\ \text{何}\downarrow & & \text{何}\downarrow \\ \text{何}h & \longrightarrow & 6km \end{array}$
倍関係の問題になる	$3km \xrightarrow{\text{何}} 6km$
「3km」「6km」を分析	$\underbrace{km \xrightarrow{3} 3km \xrightarrow{\text{何}} 6km}_{6}$
「×」の文法	$\underbrace{km \xrightarrow{3} 3km \xrightarrow{\text{何}} 6km}_{3\ \times \text{何} = 6}$
「÷」の文法	何＝6÷3

6. おわりに

学校数学の主題になる「量・数」の数学は，「数は量の比」である。一方, 学校数学は,「数は量の比」ではなく，「数は量の抽象」を択っている。「数は量の比」は, いつも世代的忘却の体 (てい) にある。

本論考は，[1], [2] に続いて，「数は量の比」の想起を行おうとしたものである。そして，「数学から学校数学を見る」が, このときの立場である。実際，学校数学の「数は量の抽象」を見る立場の数学が，「数は量の比」である。

「数は量の抽象」は, ＜量→数＞の写像論である。しかし，この立場を貫徹しようとして，無理を糊塗する理屈 (没論理) を重ねることになった。いまや「数は量の抽象」は複雑で膨大な論になっているが，基本の考え (出発点) は単純で，＜量→数＞の写像論である。

学校数学は「数は量の抽象」を択っているが,実際の授業では，＜量→数＞の写像論でとどまっている。すなわち ,「数は量の抽象」の論理 (没論理) を真面目に使って量の問題を推論するということは，やっていない。実際，これをやれば，わけのわからない内容になる。(推論のレベルまで降ると，「数は量の抽象」の混沌に対して「数は量の比」の明解がはっきりしてくる。) 学校数学が「数は量の抽象」を択っていても，なんとかやり通せているのは，「数は量の抽象」の深みにまでは踏み込んでいないからである。

参考文献

[1] 宮下英明 (2008) :「わり算」「割合」の概念整理 , 日本数学教育学会誌 算数教育 , 2008, vol. 90, no.4, pp.67-70.

[2] —— (2008) :「1 と見る」の数学 , 日本数学教育学会誌 算数教育 , 2008, vol. 90, no.12, pp.25-29.

[3] —— (2007) :「数とは何か？」への答え , http://m.iwa.hokkyodai.ac.jp/meb/number/