図解

現職教員・教員養成コース学生
＆数をわかりたい人のための
「数」がわかる本 シリーズ

講義編 (1)

「数の理解」15講

Ver. 2013-07-17

宮下英明 著

「数」がわかる本 講義編 (1)

「数の理解」15 講

本書について

巷には「数」を主題にした一般者向け教養本や現職教員・教員養成課程学生を対象にした教科書的な書籍が，いろいろ出回っています。しかし，数学にいろいろな数があることを視野におきつつ「そもそも数とは？」の視点から数を論じるようなものは，どうも無いようです。

「そもそも数とは？」に対しては，「数にはこのような意義をもたせており，そしてこの意義を実現するものとして，数はこのような構造のものである」というように答えることになります。この「意義・構造」をうまく解説している書籍がありません。

本テキストは，「数とはこのような意義・構造のものである」をできるだけ簡単に，しかし必要な要素を落とさずに，解説しようとするものです。そして，大学の 15 講の講義にのるように，内容を選択し配置してみました。

対象とする読者

このテクストは，つぎのようなひとを対象に作成しています：

o つぎの疑問をもったひと：
「*学校で自然数，分数，正負の数，複素数といくつか数を習ってきたけど，そもそも数って何？*」
あるいは，このような疑問をもったことがないひと。

o 数とは「ものを数えたり, ものに番号をつけたりするもの」だと思っているひと。(自然数の田舎に留まって，これが世界だと思っているひと。)

o 数はタイルを使って指導できるものだと思っているひと。

o「マイナスとマイナスをかけたらプラス」を説明できないひと。

o 複素数とは，実数解をもたない方程式に解をもたせるために人工的につくった「虚構の数」だと思っているひと。

読者は，このテキストに書いていることがこれまで学校で教わってきたこととはぜんぜん違うことに，最初とまどうでしょう。
しかし，数の考え方のワン・パターンが見えてきて，「複素数は正負の数の延長」みたいなことがわかり，正負の数や複素数の積を意味の理解に立って簡単にできるようになっているそんな自分を見出すようになるとき，とまどいは「目から鱗が落ちる」に変わるでしょう。

このテキストの読み方

「そもそも数とは？」の問いに答えるという趣旨から，内容的に必要最小限のこと，そして理解のために必要最小限のことを，述べるようにします。さらに詳しい内容は，本テクストのベースになっているつぎのテクストにあたってください：

『「数とは何か？」への答え』
『いろいろな数がつくられるしくみ』
『いろいろな数が「数」であること』
『四元数』
『量計算の論理』

本テクストは，自然数 → 分数 → 正負の数 → ････ のように進むふうにはなっていません。読者はこのことに疑問に感じるかも知れませんので，この点についても説明しておくことにします。

1. 自然数に関する内容が僅かでしかも優先順位が低いことについて

新しい数は，既にある数を構成要素にしてつくられます。建物の喩えで言うと，ユニットの形で与えられている建材を組み合わせるという感じです。
さて，自然数はすべての数の出発点になります。そこで，自然数の話は「建材を無いところからつくる」話が主要になります。これは重要な内容ですが，このテキストの主題は「数とはどういうものか？」の問いに形 / 構造で答えるというものです。よって,「建材づくり」の内容をカットした方が，話全体の見通しがよくなります。
よって，建物の形 / 構造の話にいちおう慣れたところで，建材づくり

の内容に入ることを勧めます。

これが，「とばし読み」で自然数の優先順位を低くしていることの理由です。

2. 数の積を，数の和よりも先に扱っていることについて

形式としては，積の方が和よりも簡単になります。したがって，積を和よりも先に取り上げています。

ただし，自然数では，求積公式が和を用いることになり，求和アルゴリズム → 求積公式 の順の扱いになります。他の数 (分数，正負の数，複素数) では，積と和は互いに独立しています。

3. 求積・求和公式で，分数が最後になっていることについて

求積・求和公式は，分数の場合が最も複雑になります。よって，分数を最後にもってきています。

4. 商と差をいっしょに扱っていることについて

商と差の定め方は，同型になります。したがって，まとめて取り上げています。

ただし，正負の数の求和公式では分数の差も出てきますので，この意味では，扱う順序が前後しています。

「数」がわかる本 既刊一覧

<「数」がわかる本>シリーズ (数学の「数」)

- 「数とは何か？」への答え
- いろいろな数が「数」であること
- いろいろな数がつくられるしくみ
- 四元数
- 量計算の論理
- 「数の理解」15 講 (本テクスト)

<「数」の数学対学校数学>シリーズ (イデオロギーの「数」)

- 数は量の比 —「数は量の抽象」ではない
- 量とは何か？—学校数学の「量」
- 「分数のかけ算・わり算」の数学と学校数学
- 「数直線でかけ算・わり算」は，わかるのがおかしい

<「かけ算の順序」論争解説>シリーズ (モンスターの「数」)

- 「かけ算の順序」論争概説
- 「かけ算の順序」論争——延々と続けられるわけ
- 「かけ算の順序」の数学
- 「かけ算の順序」のイデオロギー

目次

本文イラスト，ページレイアウト，表紙デザイン：著者

はじめに

0.1 正負の数，複素数まで拡げないと「数」は見えてこない

「山とはどんなものか？」「町とはどんなものか？」「国とはどんなものか？」‥‥

自分が棲んでいるところに留まって考えたことは，別の世界に出て行くことでたちまち壊れてしまいます。
自分が棲んでいるところに留まるとは自足した状態ですから，そもそも「山とはどんなものか？」「町とはどんなものか？」「国とはどんなものか？」‥‥という問題を立てることもないわけです。

自分が棲んでいるところから外に出ることで，自分が偏見の中に棲んでいたことが発見されます。
この意味で，外に出ることが＜解毒作用＞になります。

「数とはどんなものか？」を考えるのも，これと同じです。
自然数や分数にとどまっていては,「数」は見えてきません。正負の数,複素数へと拡げる必要があります。

> ただし，いろいろな数にただ出会うというのはだめで，「数とはどんなものか？」の視点からそれらがきちんと扱われることがなければ, やはり「数」は見えてきません (「数とはどんなものか？」の意識そのものが起こりません)。

0.2「数がわかる」とは，何がどうわかること？

「山とはどんなものか？」「町とはどんなものか？」「国とはどんなものか？」‥‥の問題意識は，外に出て多様な世界に出会うごとに，＜本質＞探求の形をとるようになります。

「数とはどんなものか？」も，これと同じです。
自然数のつぎに分数，分数のつぎに正負の数，正負の数のつぎに複素数‥‥と異なる数が現れるごとに，「数とはどんなものか？」の問題意識は，「数」の＜本質＞（自然数，分数，正負の数，複素数‥‥のすべてに通底 / 共通しているもの) を求めるような形になります。

数学では，＜本質＞を形 / 構造としてとらえます。
ですから，「数とはどんなものか？」に対する答えはつぎの形になります：

「こんな形 / 構造のものが，数である」

結論から言いますと，「数とはどんなものか？」に対する答えは，つぎのこと (「数」の道具性) を述べるものになります：

1. 数は，２量の比 (倍の関係) を表すためのもの
2. 倍の合成 (倍の倍) を扱うために，数の積 (記号「×」) を導入する
3. 倍の和を扱うために，数の和 (記号「＋」) を導入する

自然数，分数，正負の数，複素数‥‥といろいろな数が出てくるのは,扱いたい量に人の欲が出てくるからです。すなわち，これまでつくってきた数では料理できない量を扱いたくて，新しく数をつくることになります。そしてつくったものを「数」と呼ぶ根拠は，上に示した道具的意味です。

0.3. 概要 (オーバービュー)

　数は，量の比を表すためのものとしてつくられます。

　最初は簡単な量を扱うことからはじまります。「個数」です。そして，「個数」を扱う数がつくられます。自然数です。

　個数の「個」の意味は，「部分を考えない」ということです。すなわち「原子」です。
　そこで，「任意に部分を考えることのできる量」を扱いたいという欲が出てきます。そしてこれを扱う数がつくられます。分数です。

　分数は，「任意に部分を考えることのできる量」の比を，自然数２つを使って表そうとするものです。しかし，自然数２つを使うやり方では表せない比があることに気づきます。
　そこで，このような比も扱えるように分数を拡張します。実数です。

　さてここから，扱いたい量に対する欲は，新たな方向に進みます。すなわち，「向きをもつ量」を扱うということです。

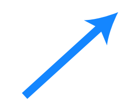
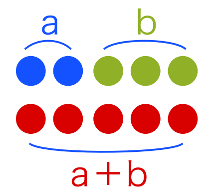
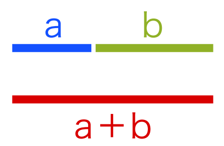
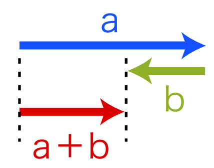
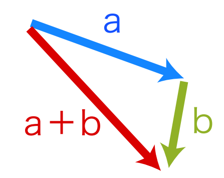
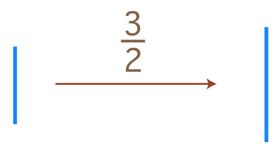
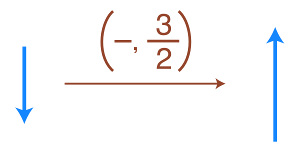
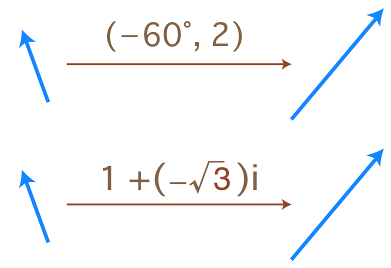
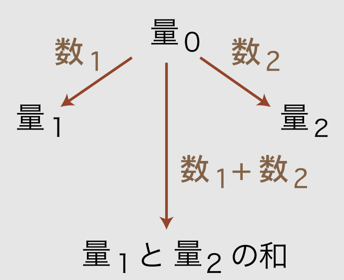
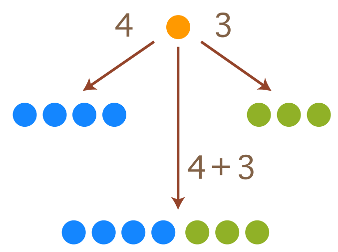
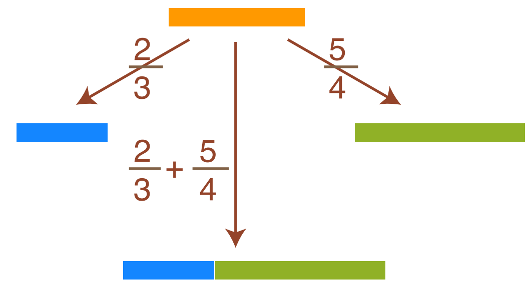
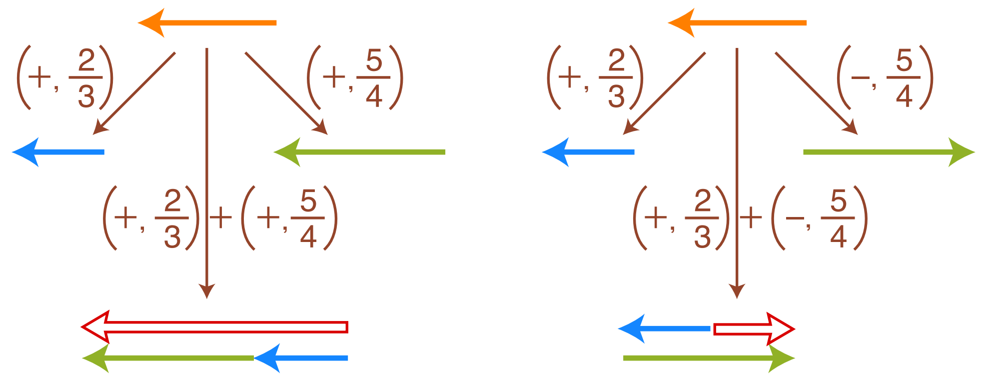
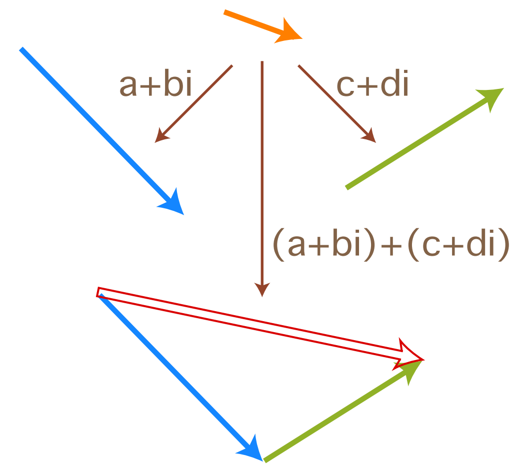
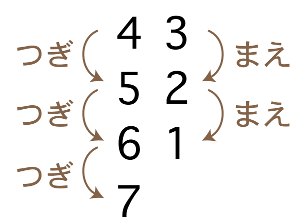
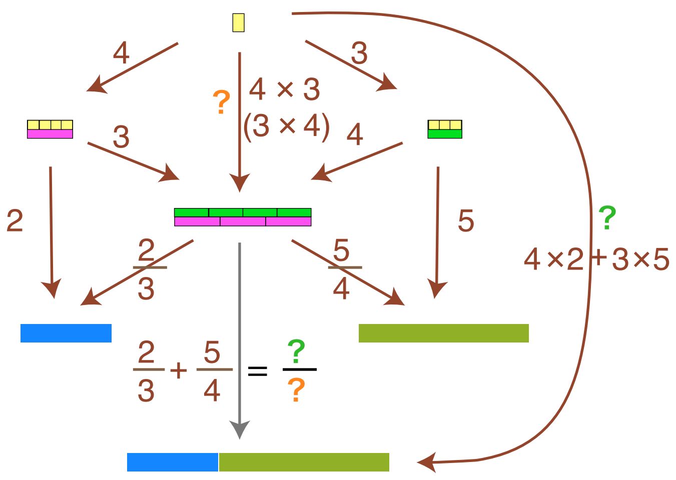
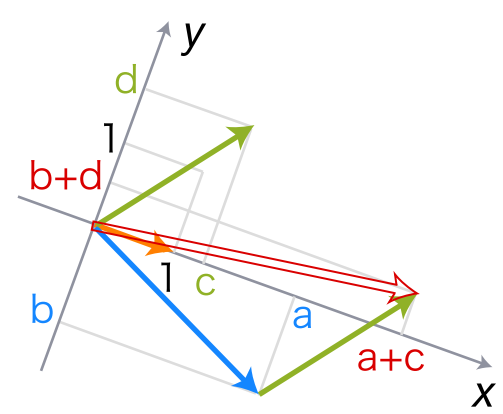
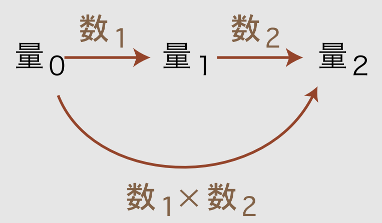
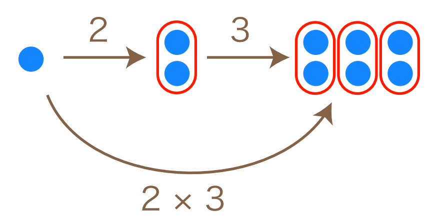
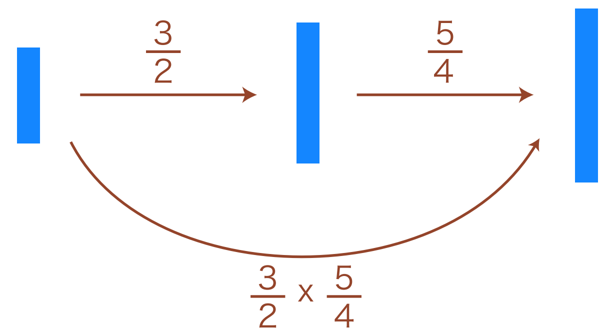
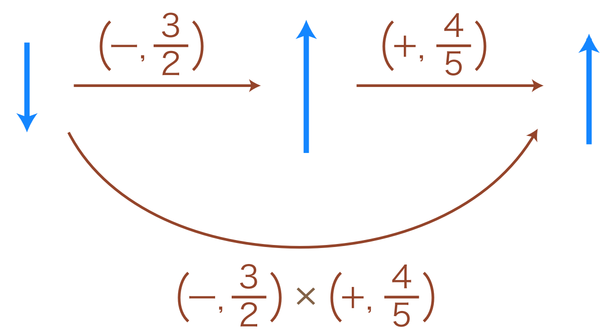
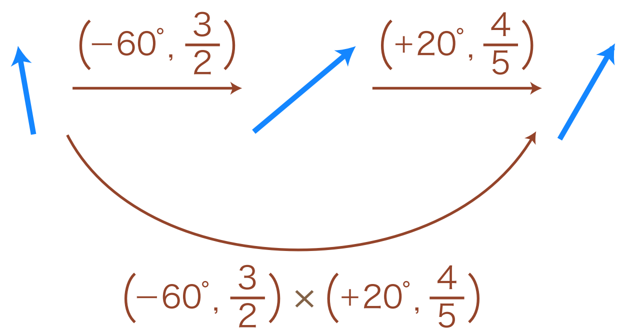
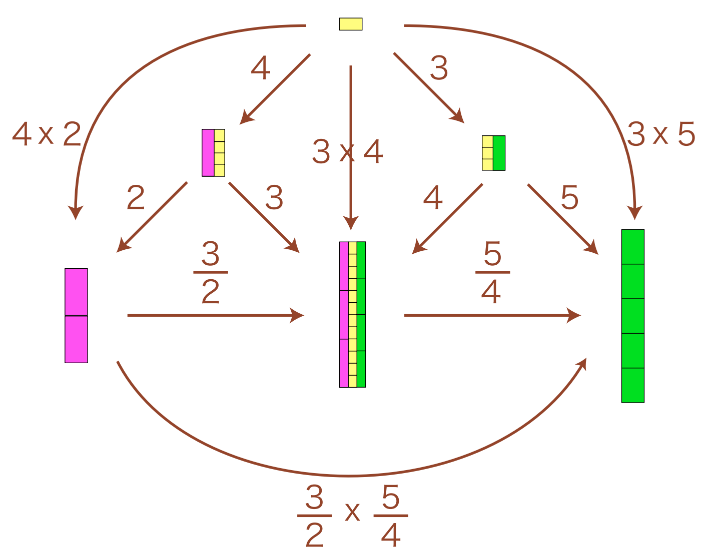
　最初は，これの最も簡単な場合として，「正逆２方向の向きをもつ量」から入ります。この量の比を扱うためにつくられる数が，正負の数です。

「正逆２方向の向きをもつ量」は，＜直線上の移動＞に表現できます。そこで，これの延長として，＜平面上の移動＞に表現できる量を扱おうということになります。この量の比を扱うためにつくられる数が，複素数です。

　これのさらなる延長は，「＜空間内の移動＞に表現できる量を扱う」です。この量の比を扱うための数をつくると，四元数というものになります。(四元数はこのテキストでは取り上げません。)

　ここでいう直線，平面，空間は，数学ではそれぞれ１次元，２次元，３次元のユークリッド空間として定められるものです。したがって，正負の数以降の数の導入は，量の空間次元拡張に応ずる展開ということになります。

　以上のように，扱いたい量に応じて数がつくられます。しかし，このように言うと，「数は人為的で，量は人為以前」のように受け取られかも知れません。
　事実はどうなのでしょう？
　量も人為です。すなわち，「ことばが＜世界＞を構成する」と同じ意味で，わたしたちは数を通して量を構成しています。

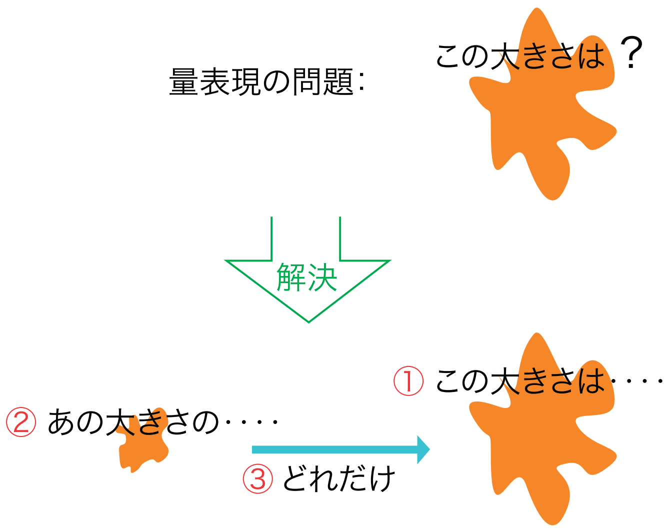
	自然数	分　数	正負の数	複素数
量 普遍対象	「個数」——普遍対象として「●」 	「線分」 が普遍対象になる量 	「直線上の移動 (1次元ベクトル)」 が普遍対象になる量 (「正逆2方向の量」) 	「平面上の移動 (2次元ベクトル)」 が普遍対象になる量 
量の和 量の和の表現に使う記号「+」				
量の比 → 数	 (「個数・自然数」は 「量・数」として特殊過ぎて, 「比」の解釈が不自然になる)			(2つの表現方法) 
倍の和 記号+ 				
求和の ロジック アルゴリズム 公式		 $\frac{n}{m}+\frac{q}{p}=\frac{n\times p+m\times q}{m\times p}$	$(\pm, m) + (\pm, n) = (\pm, m+n)$ $(+, m) + (-, n) = (+, m-n) \quad (m \geqq n)$ $(+, m) + (-, n) = (-, n-m) \quad (m \leqq n)$	 $(a+bi)+(c+di)$ $=(a+c)+(b+d)i$
倍の合成 (倍の倍) 記号x 				
求積の ロジック アルゴリズム 公式	$2\times③=(2+2)+2$	 $\frac{n}{m}\times\frac{q}{p}=\frac{n\times q}{m\times p}$	$(\pm, m)\times(\pm, n) = (+, m\times n)$ $(+, m)\times(-, n) = (-, m\times n)$	$(\theta_1, r_1)\times(\theta_2, r_2)$ $=(\theta_1+\theta_2, r_1\times r_2)$

第１講　「数」の意味 —— 数は量の比

1.1　数の契機：量表現

「数」は，量表現から起こります。

人が量 (大きさ) を表す方法には，いろいろあります。
身振りで量を表すのも，そのひとつです。
そして，数学の主題になる「量表現」は，つぎのものです：



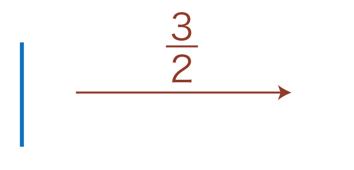
このときの「どれだけ」は，２量の比 (倍関係) になっています。数学の量表現は，「相対的表現」です。——ここが重要な点です！

そこで，２量の比 (倍関係) を表す道具をつくれば，量表現ができることになります。この道具が「数」です。
「数」は，このようにして起こります。

1.2　数は，２量の比を表すためのもの

量の表現を「相対的表現」として考え，この量表現の道具をつくろうとすると，２量の比を表すものをつくることになり，そしてこうしてつくられるのが，数です。

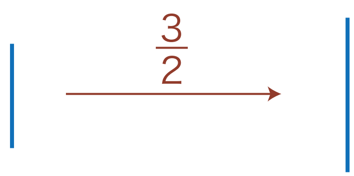
つぎは「左辺の量の 3/2 倍が右辺の量」の図ですが，これは「左辺の量をもとにして右辺の量を表わす」ものになっています：



このテキストでの学習のゴールは，「数は２量の比を表すもの」の考えが<身につく>ことです。
たったこれだけです！

1.3 「単位」

つぎは，右辺の量が左辺の量の 3/2 倍として表されている図です：



ここで左辺の量に例えば「A」の名前を与えれば，右辺の量は「3/2A」と表現できます。

名前をつけられる等によって＜もとにする量＞に特化された量は，「単位」と呼ばれます。

わたしたちが日常的に使う量表現は，単位を使う形になっています。
たとえば「5 m (メートル)」「11.8 秒」「55kg(キログラム)」は，それぞれ「mの 5 倍の長さ」「秒の 11.8 倍の時間」「kg の 55 倍の重さ」の意味です。

ちなみに ,「＜もとにする量＞に特化された量」の意味で「単位」を理解している人は，きわめて稀です。すなわち，多くのひとが，単位がそれ自体一つの量であるというようには受けとっていません。
　実際,「m (メートル)」「秒」「kg(キログラム)」と言えず「1 m」「1 秒」「1 kg」と言わないと落ち着かないのは，「m」「秒」「kg」を特定の量の名前と思っていないからです。

1.4 扱いたい量が新たに出てきて，新しい数がつくられる

　自然数，正負の数，複素数，‥‥ のように数がいろいろあるのは，「扱いたい量が新たに出てきて，新しい数がつくられる」ためです：

　　扱いたい量に対する欲が出てくる；
　　これまでの数では料理できない量がここにある。
　→ この量を扱える数をつくる。

　自然数が扱う量は ,「個がいくつ」と言い表される量です。
　ここで,「個」には「部分を考えない」という含意があります。つまり,「個」は「原子」です。

　例：硬貨，切ることを考えないりんご

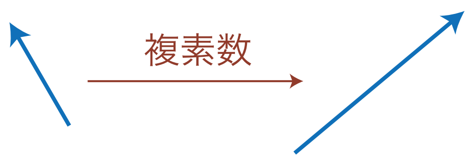
　部分のある量を扱いたいということで，分数がつくられます。
「部分がある」とは，「切る / 分割する」を考えることができるということです。

　例：長さ / 距離，面積，体積，重さ，時間，速さ，クリスマスケーキ

分数で扱った量にさらに正逆２方向の向きが加わったものを量としてを扱いたいということで，正負の数がつくられます。

例：直線上正逆２方向の移動，昇降，増減，正逆２方向の速さ，時間の経過と遡行

正逆２方向とは，直線上方向自由（1 次元空間内方向自由）ということです。これを延長すると，平面上方向自由（2 次元空間内方向自由）になります。そして平面上方向自由の量を扱いたいということで，複素数がつくられます。



例：平面上方向自由の移動，平面上方向自由の速さ

この先の延長は，どういうものになるでしょう？

「空間内方向自由（３次元空間内方向自由）の量を扱いたい」になり，「これを扱える数をつくる」になります。

このような数はあるの？——あります。「四元数」と言います。

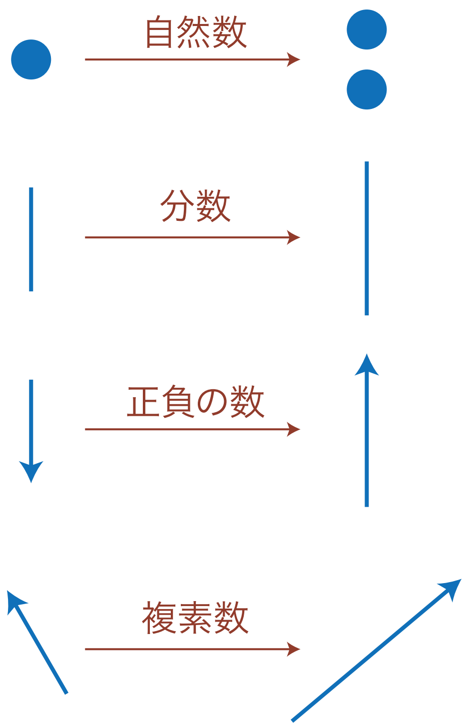
四元数を語れば数学的にかなり専門的な話になりますので，このテキストでは四元数に触れません。

四元数に進むと，数に関してもたれている「偏見」で気づかれにくい重要なことが，またひとつ明らかになります。

四元数では，積の可換性（ $m \times n = n \times m$ ）が成り立ちません。したがって，これまでほとんどあたりまえと思っていた「積の可換性」は「数」の条件ではない（「数」にとって本質的なことではない）ことになります。

1.5　量の一般表現に使う絵を定める

「扱いたい量が新たに出てきて，新しい数がつくられる」のところで，つぎの図を示しました：



この図では，自然数，分数，正負の数，複素数が扱う量を一般的な形で表そうとしています。

分数では，線分の絵にしています。

実際，切る（部分をつくる）操作を許す絵としては，線分がいちばんシンプルです。特に，線分の場合，切る操作は一つの形しかありません。

そして，「正逆２方向の向きを伴う量」の絵に延長できる絵という位置づけからも，やはり線分ということになります。

線分の絵がひじょうに抽象度の高いものであることに，留意してください。——長さ / 距離はよいとして，面積，体積，重さ，時間，速さ，クリスマスケーキ，‥‥を線分に表すわけですから。

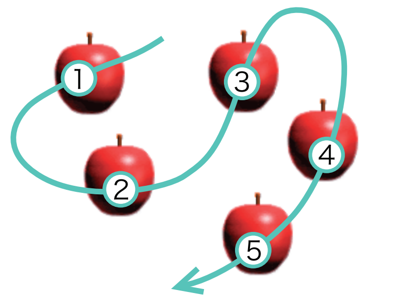
実際，分数の表現の課題で，学生から線分の絵が出てくることはほとんどありません。たいてい，長方形や円（パイ / クリスマスケーキ / リンゴを等分するイメージ）になります。

第２講　比を表現 (数をつくる)

2.1　自然数の場合

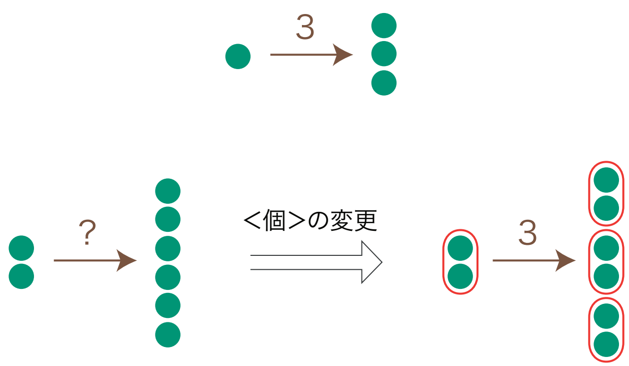
自然数の構築は, <個>の数 (かず) ──「個数」──の表現が契機になっています：

系列をつくれば，これを使って個数を表せる。
例えば，系列「1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → ‥‥」では,



：5個

そして，「個数」に対しては，つぎの「比」の見方ができます：

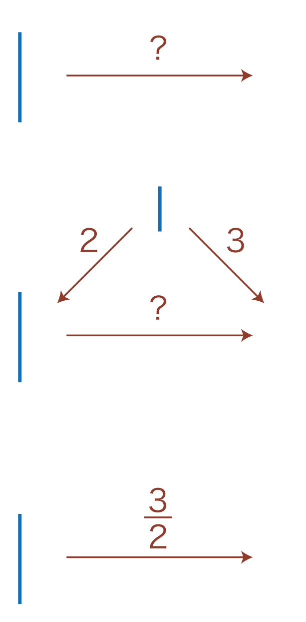


ただし，自然数では，２量が比の表現をもてない場合が出てきます。

2.2　分数の場合

部分のある量 (「切る / 分割する」ができる量) を扱いたいとなったとき，これの比 (倍関係) の表現のために分数がつくられます。
このときの比 (倍関係) の表現のきまりはつぎのようになります：

２量が，第三の量のそれぞれ２倍，３倍になっているとき，
この「2」と「3」をそのまま使う形で, 比を「3/2」で表す。



小学校では「3/2」を「２つに分けた３つ」と読ませていますが, これは「左辺の量を２つに分けた３つが右辺の量」から来ているわけです。

つぎが，ここでの比表現の要点になります：

自然数２つを使って比表現をつくる。

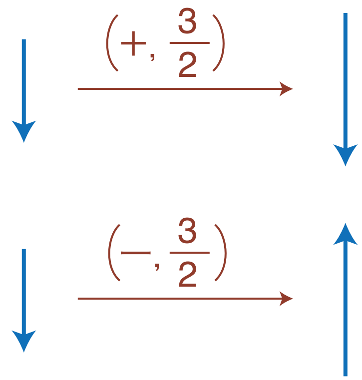
2.3　正負の数の場合

正負の数に対応する量は，正逆２方向の向きと大きさをもつ量です。(「扱いたい量が新たに出てきて，新しい数がつくられる」)

正逆２方向の向きと大きさをもつ量の比 (倍関係) は，つぎの２つの情報の組として定めます：

1. 向きの変換に関する情報：同方向なら「＋」，逆方向なら「ー」で表す。
2. 大きさの変換に関する情報：大きさの比を既知の数で表す。

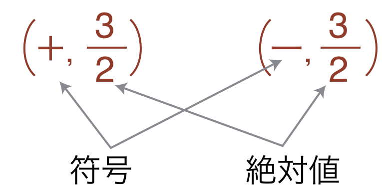
したがって，つぎのようになります：



以上が「正負の数」のしくみです。──そして，(＋ , 3/2)，(ー , 3/2) を「＋ 3/2」「ー 3/2」と表記しているわけです。

ここで，言い回しを容易にするために，「向きの変換に関する情報」「大きさの変換に関する情報」をそれぞれ「符号」「絶対値」と呼ぶことにします。

さらに，正負の数 n の符号を sgn(n)，絶対値を | n | と表すことにします。



sgn((＋ , 3/2)) は ＋，　|(＋ , 3/2)| は 3/2
sgn((– , 3/2)) は –，　|(– , 3/2)| は 3/2

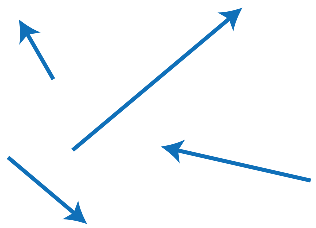
2.4　複素数の場合

　正負の数に対応する量は

正逆２方向の向きと大きさをもつ量

でしたが，これは「直線上方向自由な向きと大きさをもつ量」と見ることができます。(「自由」と言っても, 正か逆かの自由しかありませんが。)

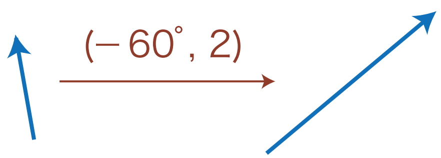
　この「直線上方向自由な向きと大きさをもつ量」の考えを延長すると「平面上方向自由な向きと大きさをもつ量」(高校数学に出てくる「平面上のベクトル」) になります：



　平面上方向自由な向きと大きさをもつ量の比 (倍関係) は，つぎの２つの情報の組で表せます：

1. 向きの変換に関する情報：どれだけの回転になっているか (角度)。
2. 大きさの変換に関する情報：大きさの比を既知の数で表す。

すなわち，つぎのようになります：



(数学では，時計回りがマイナスで，逆がプラス)

これが「複素数」のしくみです。——「正負の数」のしくみの単純な拡張であることを，確認してください。

第 3 講　数の積 (「×」の文法)

3.1 数の積の意味（記号「×」の文法）

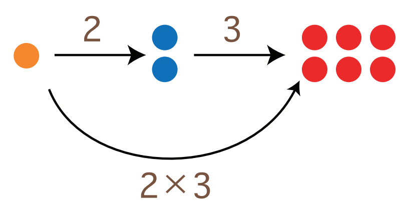
　数の積（記号「×」の文法）は，つぎのように決められます：

$$\begin{tikzcd} \text{量}_0 \arrow[r, "\text{数}_1"] \arrow[rr, bend right, "\text{数}_1\times\text{数}_2"'] & \text{量}_1 \arrow[r, "\text{数}_2"] & \text{量}_2 \end{tikzcd}$$

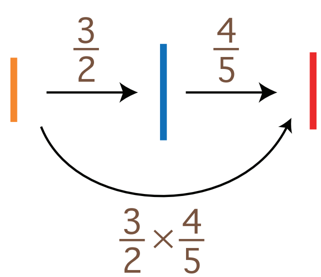
すなわち，「倍の倍，あわせて何倍」（倍の合成）を「数の積」の形に書き表すということです。

　数とそれが扱う量が違えば数の積のイメージもつぎのように違ってきますが，形は同じであることを確認してください：

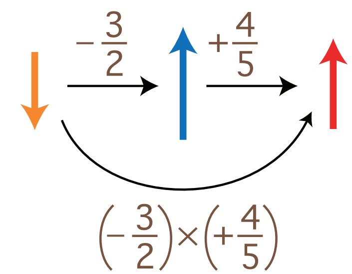
自然数：



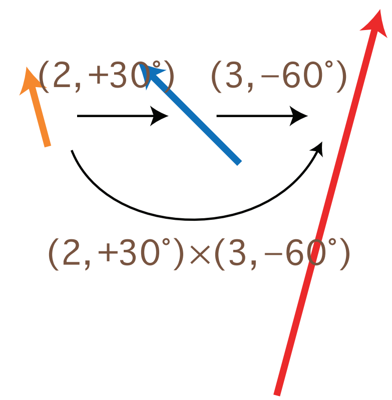
分数：



正負の数：



複素数：



3.2　求積公式

3.2.1　求積公式

数の積は，つぎの形で定義されました：

$$\begin{tikzcd} 量_0 \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1 \times 数_2"'] & 量_1 \arrow[r, "数_2"] & 量_2 \end{tikzcd}$$

さて，表現「$数_1 \times 数_2$」に対応する数は，存在するのでしょうか？実際に求めることができれば問題ないわけですので，求める方法をつぎに考えることになります。

「実際に求めることができる」とは，

$数_1$ と $数_2$ に対し一定の操作を施して求められる

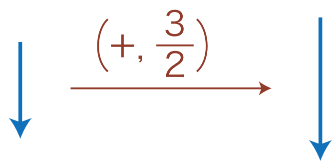
ということです。そして，この操作を述べる式は「求積公式」ということになります。

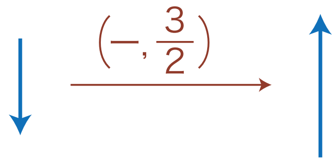
自然数，分数，正負の数，複素数に対しては，求積公式が立ちます。
自然数，分数の求積公式は，それぞれ§　と§　で取り上げることにします。
ここでは，自然数，分数の求積公式が既にわかっているとしたときの，正負の数と複素数の求積公式を取り上げます。

3.2.2　正負の数の場合

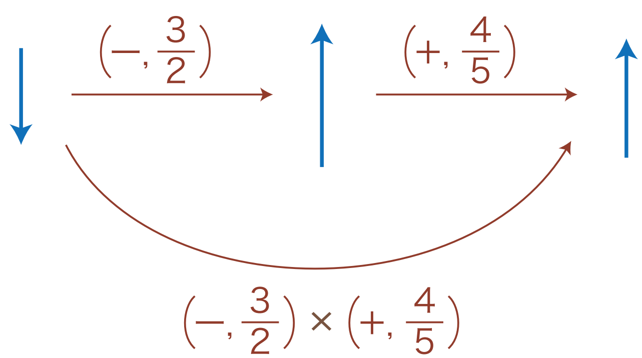
正負の数は，＜正逆２方向の向きをもつ量＞の比を表すものとして，つぎの２つのパートで構成されていました：

1. 符号 (向きの変換に関する情報)：同方向なら ＋, 逆方向なら ー。
2. 絶対値 (大きさの変換に関する情報)： 大きさの比を既知の数で表す。





いま正負の数の積を，つぎの場合で考えてみましょう：



向きの変換に関しては，最初は反転 (–) でつぎは同方向 (＋) ですから，あわせて反転 (–) になっています。

大きさの変換に関しては，最初は 3/2 倍でつぎは 4/5 倍ですから，あわせて 3/2 × 4/5 倍になっています。

よって：

$$\left(-, \frac{3}{2}\right) \times \left(+, \frac{4}{5}\right) = \left(-, \frac{3}{2} \times \frac{4}{5}\right)$$

これから類推して，求積の公式がつぎのようになることがわかります：

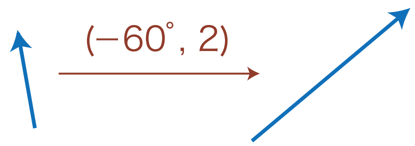
> 正負の数 m，n に対し，
>
> 1. m × n の符号は，
>   - m と n が同符号であるとき ＋
>   - m と n が異符号であるとき –
> 2. | m × n | ＝ | n | × | m |

注意：式 | m × n | ＝ | n | × | m | の左辺の「×」は正負の数の「×」，そして右辺の「×」は正負の数の絶対値の表現に使われている数の「×」です。(両者は別物です！) ――正負の数の絶対値の定義を参照してください (§2.3 比の表現 (数表記のきまり)：正負の数の場合)。

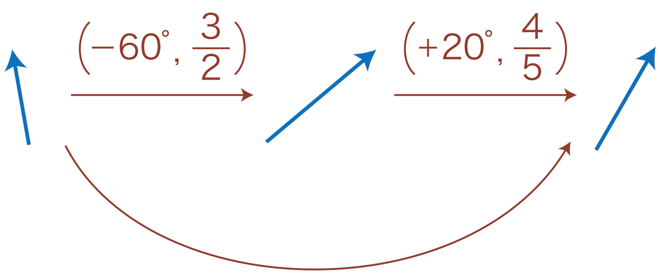
3.2.3　複素数の場合

複素数は，＜平面上方向自由な向きと大きさをもつ量＞の比を表すものとして，つぎの２つの情報で構成されていました：

1. 向きの変換に関する情報：回転の大きさ (角度)
2. 大きさの変換に関する情報：大きさの比



いま複素数の積を，つぎの場合で考えてみましょう：



$$\left(-60^\circ, \frac{3}{2}\right) \times \left(+20^\circ, \frac{4}{5}\right)$$

向きの変換に関しては，最初は -60° の回転でつぎは $+20^\circ$ ですから，あわせて $((-60)+(+20))^\circ$ になっています。

大きさの変換に関しては，最初は 3/2 倍でつぎは 4/5 倍ですから，あわせて 3/2 × 4/5 倍になっています。

よって：

$$\left(-60^\circ, \frac{3}{2}\right) \times \left(+20^\circ, \frac{4}{5}\right) = \left(((-60)+(+20))^\circ, \frac{3}{2} \times \frac{4}{5}\right)$$

これから類推して，求積の公式がつぎのようになることがわかります：

1. 向きの変換のパートは，和。
2. 大きさの変換のパートは，積。

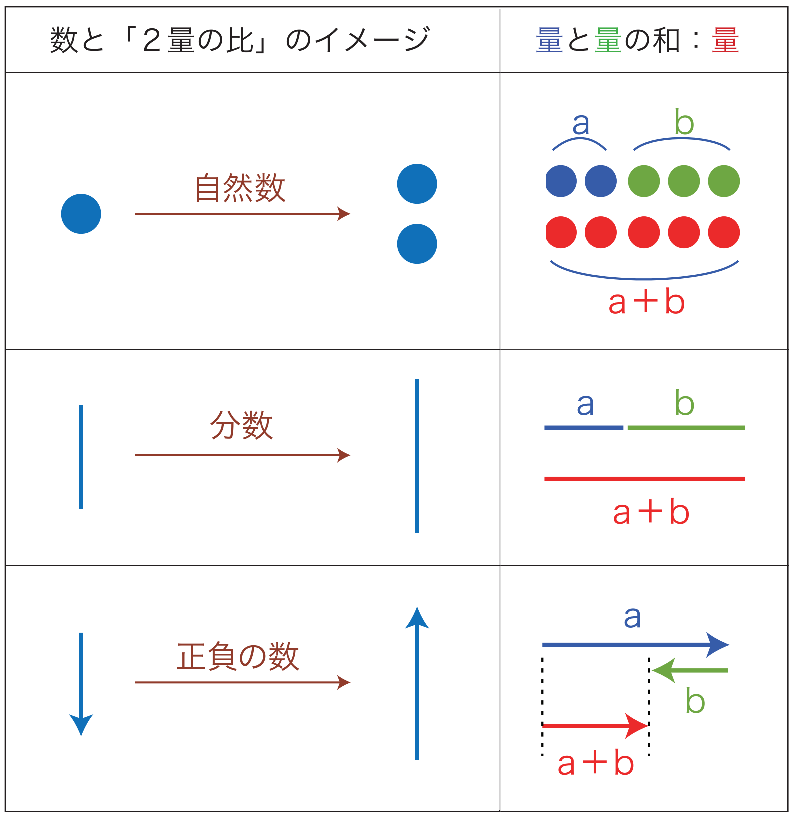
第４講　数の和 (「＋」の文法)

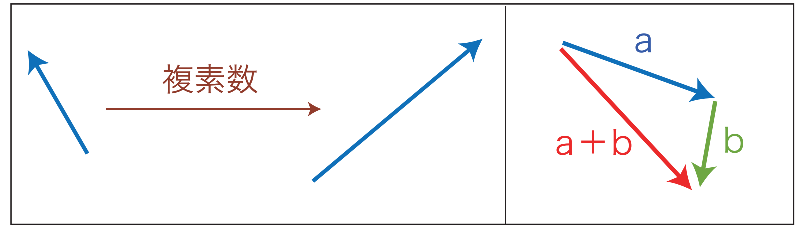
4.1 量の和

量においては，２量の和を考えます。（すなわち，「量」の条件の一つに，「２量に対してその和が定まる」があります。）

量ａと量ｂの和を，記号「**+**」を使って「ａ **+** ｂ」で表すことにします。（数の「+」と区別するために，「+」の太字を使うことにします。）

数とそれが扱う量の違いによって，量の和のイメージもつぎのように違ってきます：

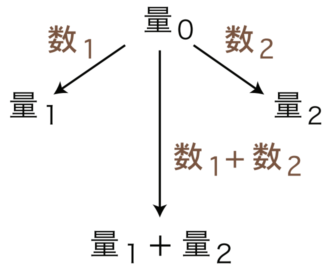




続く節で，「数の和」と数の和の記号「+」を導入することになりますが，量の和と数の和，量の＋と数の＋をきちんと区別できることがひじょうに重要になります。――この区別は，（このテキストの最大のテーマともいえるところの）「量と数の区別」の一環です。

4.2 数の和の意味（記号「+」の文法）

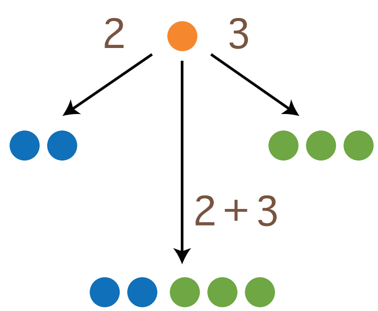
　数の和（記号「+」の文法）は，つぎのように決められます：



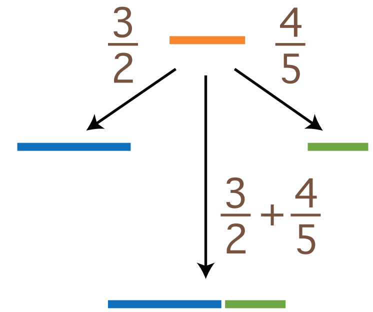
すなわち，「もとの量から２量の和への倍」を「倍の和」ととらえ，そしてこれを「数の和」の形に書き表すということです。

　数とそれが扱う量が違えば数の和のイメージもつぎのように違ってきますが，形は同じであることを確認してください：

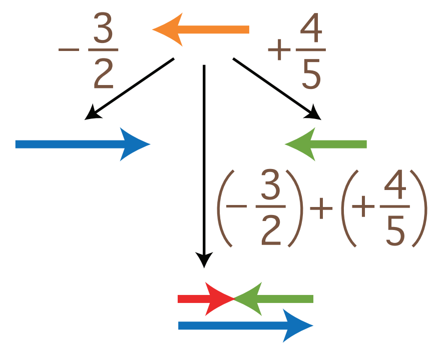
自然数：



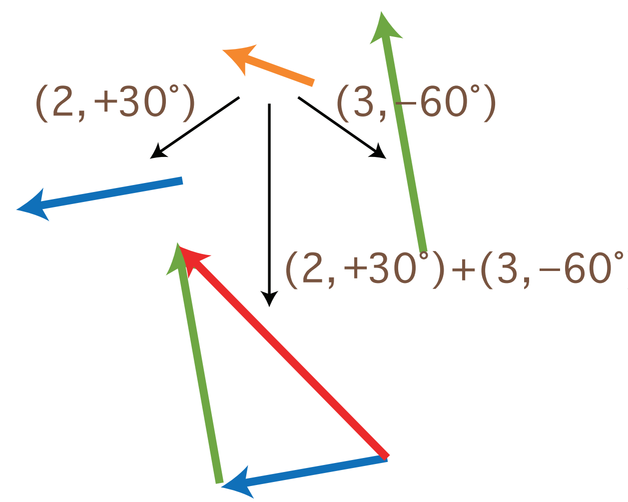
分数：



正負の数：



複素数：



4.3　求和公式

4.3.1　求和公式

数の和は，つぎの形で定義されました：

$$\begin{tikzcd}
 & \text{量}_0 \arrow[dl, "\text{数}_1"'] \arrow[dr, "\text{数}_2"] \arrow[dd, "\text{数}_1 + \text{数}_2"] & \\
\text{量}_1 & & \text{量}_2 \\
 & \text{量}_1 + \text{量}_2 &
\end{tikzcd}$$

さて, 表現「数 $_1$ ＋ 数 $_2$」に対応する数は, 存在するのでしょうか？
実際に求めることができれば問題ないわけですので，求める方法をつぎに考えることになります。

「実際に求めることができる」とは,

数 $_1$ と 数 $_2$ に対し一定の操作を施して求められる

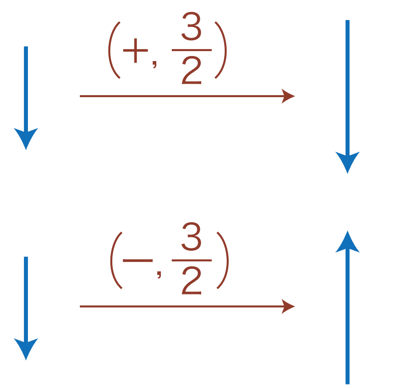
ということです。そして，この操作を述べる式は「求和公式」ということになります。

自然数，分数，正負の数，複素数に対しては，求和公式が立ちます。
自然数，分数，複素数の求わ公式は，それぞれ § ，§ ，§ で取り上げることにします。
ここでは，自然数，分数の求積公式が既にわかっているとしたときの，正負の数の求和公式を取り上げます。

4.3.2 正負の数の場合

正負の数は，＜正逆２方向の向きをもつ量＞の比を表すものとして，つぎの２つのパートで構成されていました：

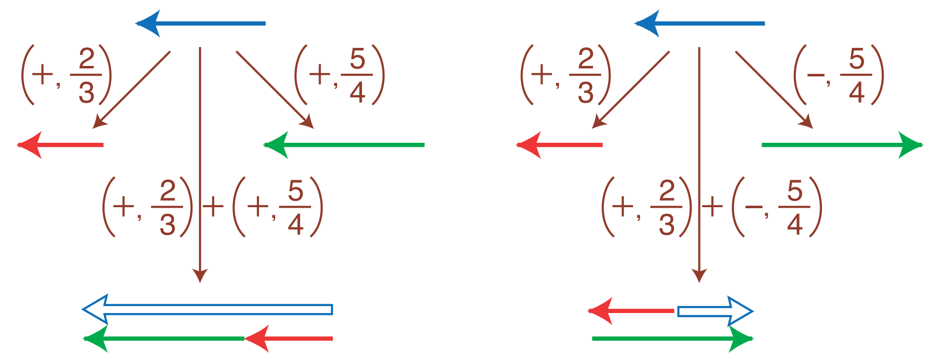
1. 符号 (向きの変換に関する情報)：同方向なら ＋, 逆方向なら －。
2. 絶対値 (大きさの変換に関する情報)： 大きさの比を既知の数で表す。



また，＜正逆２方向の向きをもつ量＞の和は，つぎのように決められました：

注意：図中の「＋」は量の和の「＋」(数の和の「＋」とは別物)

よって，正負の数の和は，同符号と異符号それぞれの場合でつぎのようになります：



そこで，この例から類推して，求積の公式がつぎのようになることがわかります：

> 正負の数 m，n に対し，
> 1. m と n が同符号であるとき，
>   (1) m＋n の符号は，m，n と同じ
>   (2) | m＋n | ＝ | m | ＋ | n |
> 2. m と n が異符号で，| m | ≦ | n | であるとき，
>   (1) m＋n の符号は，n と同じ
>   (2) | m＋n | ＝ | n | − | m |

注意：式 | m＋n | ＝ | m | ＋ | n |，| m＋n | ＝ | n | − | m | の左辺の「＋」は正負の数の「＋」，そして右辺の「＋」「−」は正負の数の絶対値の表現に使われている数の「＋」「−」です。— 改めて，正負の数の定義を参照してください (比の表現 (数表記のきまり)：正負の数の場合)。

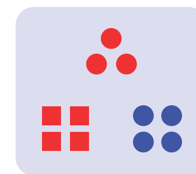
第５講　自然数

5.1　個数・計数・系列

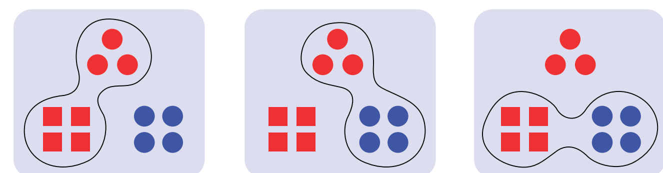
5.1.1　個数

自然数の構築は, ＜個＞の数 (かず) ── 「個数」──の表現が契機になっています：

「個数」は, 人のひじょうに原初的な意識形態の一つです。──このことを見るために, つぎの３つの対象に対する同類（仲間）抽出を考えてみましょう。



つぎのどの同類抽出にも理屈が立ちます：



実際, 左から,「同じ色」,「同じ形」, そして「同じ個数」の同類抽出です。

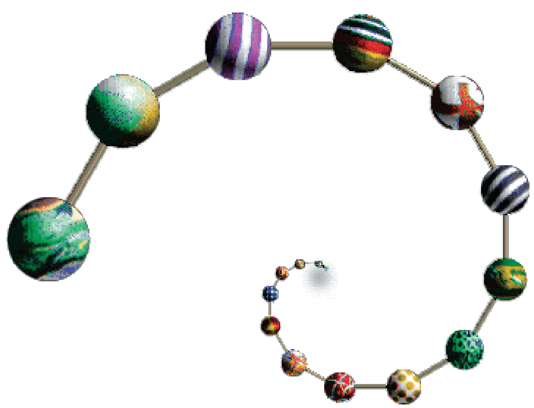
5.1.2　系列

「自然数」はそれ自体一つの形 (構造) です。それは「系列」と呼ばれる構造とその上の算法 (加法と乗法) で構成されています。

算法	自然数
系列	

自然数は，系列の構造のみでも重要な道具になります。実際，計数の道具として機能するのは系列の部分です。また，識別番号，順番という使われ方も，系列の道具性に属します。

系列は，つぎのような形を指すことばです：



すなわち，「はじめ」があり，これのつぎがあり，さらにつぎがあり，‥‥この関係が際限なく続きます：

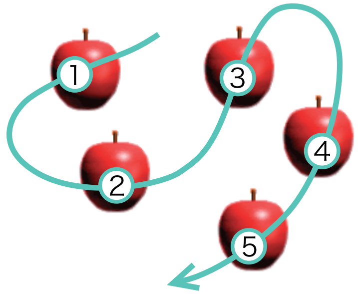
はじめ → はじめのつぎ → はじめのつぎのつぎ → ‥‥

ここでは，イメージに訴えて系列の形を示していますが，この形を数学的にきちんと定義したものが「ペアノ (Peano) の公理」です。ペアノの公理については，『いろいろな数がつくられるしくみ』にあたってください。

5.1.3　計数

系列は，つぎのような具合に，計数の「ものさし」として使われます：

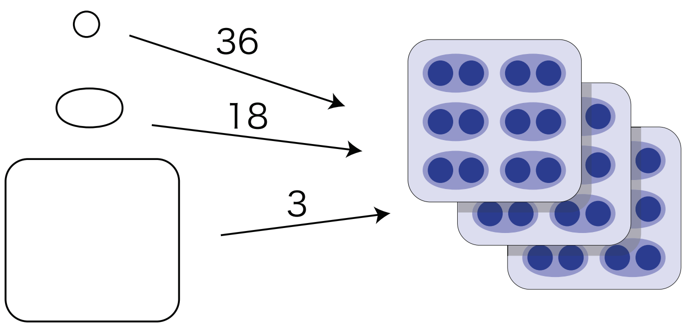
　系列「1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → ‥‥ 」では,



：5個

すなわち，系列を「落ちなく重なりなく」対象に添わせたときのその最後の要素をもって，個数の表現とします。

　個数を考えるときの<個>は，あくまでも人の解釈であるということに注意しましょう。何を<個>と見なすかに絶対はありません――基本的に，状況依存です。



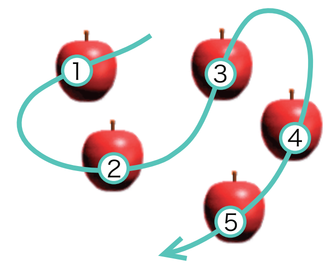
5.1.4　識別番号・順番

　系列の用途には，個数の表現の他に，個の識別があります。すなわち，識別の番号（背番号，登録番号，ユニット番号，製品番号，等々）として使うというものです。――系列は異なる要素を限りなくもっていますが，このことを利用します。

　識別番号の特別なものに「順番」があります。

　すなわち，識別番号は系列の一部と一対一の対応をつくるわけですが，その系列の部分として系列の切片（とびとびではなく，きっちり 1 → 2 → 3 →‥‥→ n）を選ぶとき,「識別番号」は特に「順番」と呼ばれます。

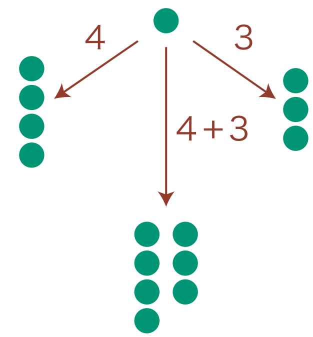
　順番がつけられる形は，計数の形と同じです：



5.2　自然数の和と積

5.2.1　求和アルゴリズム

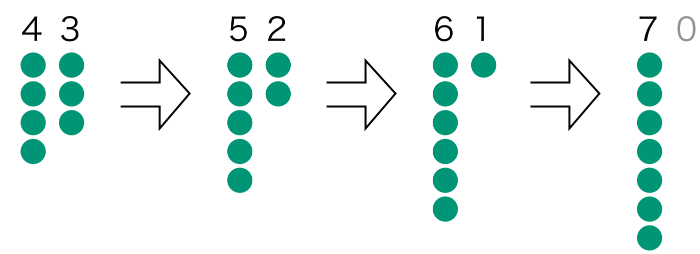
数の和は倍の和として導入されます (§6.2 和の意味)。
そこで，自然数の場合は，つぎのようになります：



さて，上の関係が成り立つようにするには，自然数の和をどのように定めたらよいでしょう？

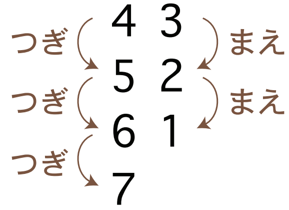
つぎの操作をします：

4 個と 3 個から始めて，一方から他方への一個ずつの移動を，
尽きるまで続ける：



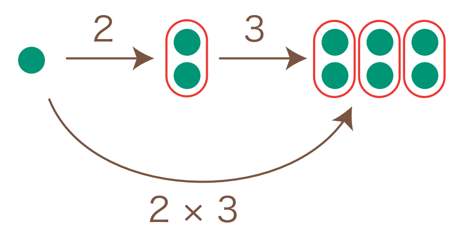
尽きたときのもう一方の側の個数 (7) が，4 + 3 に対応させればよいものになります。

そこで，上の操作の各ステップでの個数の変化を書き留めると，これがそのまま求和の手順（アルゴリズム）になります：



5.2.2 求積公式

数の積は，倍の合成として導入されます (§5.1 積の意味)。
そこで，自然数の場合は，つぎのようになります：



したがって，つぎが自然数の求積の公式になります：

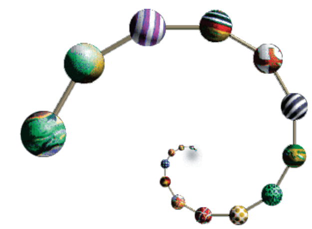
$$2 \times 3 = \overbrace{(2 + 2) + 2}^{3}$$

第６講「十進数」―― 十進生成の自然数

6.1　十進生成の系列

6.1.1 系列の実現

「系列」を実現するには，工夫が要ります。



実際，異なるものをその都度デザインするというやり方では, 息が続きません。それに，そもそも覚えることができませんから，系列（自然数）として使うこともできません。

また，単純な規則によるつくり方では，使い勝手のよいものになりません：

$$|,\ ||,\ |||,\ ||||,\ |||||,\ \cdots\cdot$$

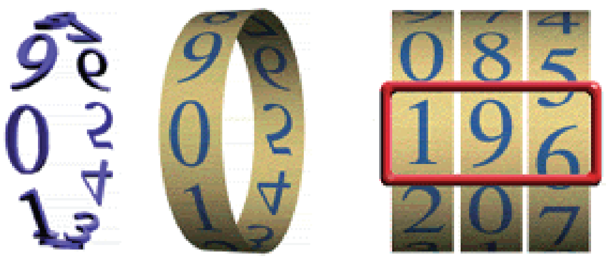
わたしたちの使っている系列（自然数）では，この問題をクリアするのに，「十進生成」のアイデアが使われています。

6.1.2　十進系列

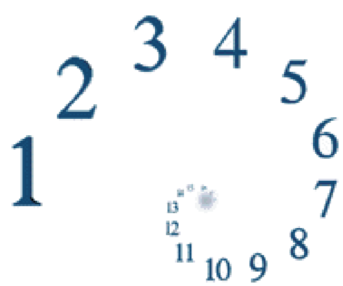
わたしたちの使っている系列（自然数）は，「十進生成」の方法でつくられています：

1. 10 個の絵から出発：　0123456789

2. これからリングをつくり，窓を用意し，カウンタと同じ動作で動かす。



3. その都度窓に現れるパターンを書き取っていけば，系列が得られる。



このような系列の作り方を十進生成と言い，このようにして作られた系列を「十進系列」と呼びます。また，十進系列を母体とする自然数を，「十進数」と呼んでいます。

6.1.3　0 ではじまる系列

十進生成は，「0」から始める方が，「1」から始めるよりも整合的な並べ方ができます：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
			54	55	56	57	58	59	60
			64	65	66	67	68	69	70
			74	75	76	77	78	79	80
			84	85	86	87	88	89	90
			94	95	96	97	98	99	100
			104	105	106	107	108	109	110
			114	115	116	117	118	119	120

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
110	111	112	113	114	115	116	117	118	119
....									

6.1.4　漢数字

「漢数字」は，位記号を併用する十進系列です。そしてこの位記号には２種類があります：

数字：一 , 二 , 三 , 四 , 五 , 六 , 七 , 八 , 九 , □ (空記号)
位記号（第一種）：□ (空記号)，十, 百, 千
位記号（第二種）：□ (空記号)，万, 億, 兆，・・・・

	千	百	十	□	千	百	十	□	千	百	十	□	千	百	十	□
	兆				億				万				□			

数表示は，つぎの規則 (文法) に従います：

1. 空記号□は，表示しない。
2. 数字□をのせている第一種位記号は，表示しない。
3. 十, 百, 千の上の一は，表示しない。

例えば，２０４１７２１００４１は，つぎのように構成されて，「二百四億　千七百二十一万　四十一」となります：

						2	0	4	1	7	2	1	0	0	4	1
						二	□	四	一	七	二	一	□	□	四	一
	千	百	十	□	千	百	十	□	千	百	十	□	千	百	十	□
	兆				億				万				□			

なお，第二種の位記号は，つぎのようになっています：

10^4	万	10^{40}	正(せい)
10^8	億	10^{44}	載(さい)
10^{12}	兆	10^{48}	極(ごく)
10^{16}	京(けい)	10^{52}	恒河沙(ごうがしゃ)
10^{20}	垓(がい)	10^{56}	阿僧祇(あそうぎ)
10^{24}	秭(じょ)	10^{60}	那由他(なゆた)
10^{28}	穣(じょう)	10^{64}	不可思議(ふかしぎ)
10^{32}	溝(こう)	10^{68}	無量大数(むりょうたいすう)
10^{36}	澗(かん)		

6.1.5　英語の数表現

英語の数表現も，漢数字と同様，２種類の位記号を使うものになっています。ただし，位はつぎのようにずれています：

	hun-dred	ten	□	hun-dred	ten	□	hun-dred	ten	□	hun-dred	ten	□	hun-dred	ten	□
	trillion			billion			million			thousand			□		

	千	百	十	□	千	百	十	□	千	百	十	□	千	百	十	□
	兆				億				万				□			

金銭の表記では「, 」を使って位表現していますが，これは英語の数表現にあわせていることになります。

6.1.6　n 進系列

わたしたちが使っている「十進数」は，十個の記号 (絵)「0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9」から生成されているわけですが，この「十」には数学的に特別な意味はありません。なぜ実際的に「十」かというと, 人が十本の指をもち, これを使って個数が数えられ，そしてこのとき計数が自ずと十進になるからです。

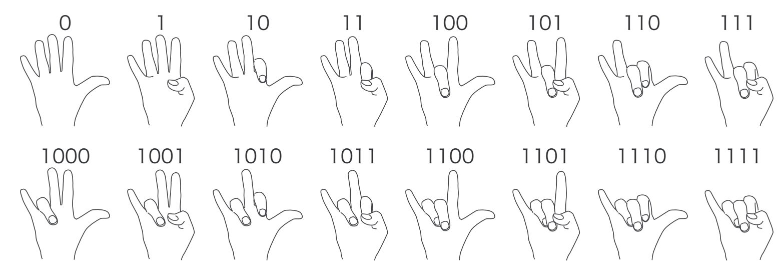
一般に，ｎ個の記号 (絵) から出発すればｎ進の系列が得られます。

コンピュータを使う仕事では，２進数や 16 進数の知識が必要になるときがあります。

「0, 1」をもとにする２進数は，つぎのように生成されます（§2.2.1 で示した十進系列の生成方法を思い出してください）：

0　1　10　11　100　101　110　111　1000　････

２進数の生成には，つぎの指使いを対応させることができます：



これを続けて指が「グー」になったら，片手を追加して，同様に続けてみましょう。「0, 1, 2, 3 ,4, 5, ････」と唱えながら数えると，２進数と十進数のつぎの対応がわかります：

10 (2), 100 (4), 1000 (8), 10000 (16), 100000 (32), 1000000 (64),
10000000 (128), 100000000 (256), 1000000000 (512)

両手が「グー」になったとき，ひとの手を借りて１つ進むと：

10000000000 (1024)

16 進数は，16 個の記号 (絵) をもとにするわけですが，つぎのものを使います：

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F

(すなわち，十進数で使った 0 から 9 の十個にに A , B , C , D , E , F の 6 個を追加します。）このとき，16 進数の生成はつぎのようになります：

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	2A	2B	2C	2D	2E	2F
....															
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	9A	9B	9C	9D	9E	9F
A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	AA	AB	AC	AD	AE	AF
....															
F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	FA	FB	FC	FD	FE	FF
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	10A	10B	10C	10D	10E	10F
110	111	....													

ここで，同じ数を 2 進，10 進，16 進のそれぞれで表記したときの，文字列の長さの関係を考えてみましょう。——つぎの相等関係から，2 進数表記は 10 進数表記の約 3 倍，16 進表記の約 4 倍の長さということがわかります：

$$2^{10} = 1024 \fallingdotseq 10^3, \quad 2^4 = 16^1$$

なお，情報化時代の基礎知識として，$2^{10} = 1024$，$2^8 = 16^2 = 256$ の関係は覚えておきましょう。

例えば，コンピュータでは，光の 3 原色赤緑青 (RGB) それぞれの強度を 0 から FF までの 256 段階に分けて，これの配分で色を表しています。これにより，$256^3 = 16777216$ 色表せることになります。特に：

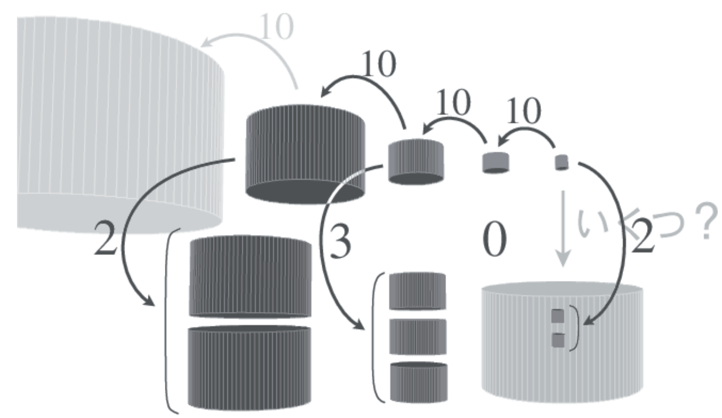
	赤	緑	青	黄	空	桃	白	黒
R	FF	00	00	FF	00	FF	FF	00
G	00	FF	00	FF	FF	00	FF	00
B	00	00	FF	00	FF	FF	FF	00

6.2　十進数計数法

系列として十進数を用いるときには，計数の省力化が可能になります——すなわち，計数法が立ちます。

個数を求める問題

に対し，先ず，＜個＞の十進のシステムをつくります。そして，このシステムの大きい要素の方から順に，下図のように，「個数を求めたい大きさに何個入るか」を数えていきます：



(余りが出たら，システムの下位の要素に移ってそれで数える)

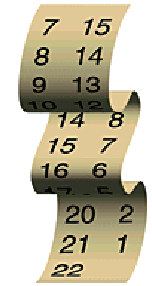
この場合「2302」が個数になるわけですが，一つ一つ数えると 2302 回数えなければならないところを，わずかの操作で済んでいます。

この省力化は，系列に十進数を使っているおかげです。カウンタは実は十進数の生成機械だったわけですが（§2.2.1），上の計数法は，カウンタの上では，「一の位のメモリを一つ一つ進めるかわりに，大きい位のメモリを直接進める」数え方になっています。

6.3　十進数の和積計算 (「筆算」)

6.3.1　十進数求和法

7+15 を加法の手順 (アルゴリズム) に従って求めるとなると，16 行を費やしてしまいます。しかし実際には，わたしたちはこの結果を３行ないし４行を費やすだけで得てしまいます。これは，十進数を使っているおかげです。



$$\begin{array}{r} {}^{1}\,7 \\ +\,15 \\ \hline 22 \end{array}$$

十進数では足し算の「九九表」を覚えてしまうことで，どんな２数の和も求められるようになります。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

小学算数では，この十進数の求和法に対し「足し算」ないし「足し算の筆算」の言い回しが使われています。

6.3.2　十進数求積法

十進数では，「かけ算九九表」を使うことで，どんな二数の積も求められるようになります（ただし計算の最終ステップで，「足し算九九表」を使います)。

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 56 \\ \hline 204 \\ 170 \\ \hline 1904 \end{array}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

小学算数では，この十進数の求積法に対し「かけ算」ないし「かけ算の筆算」の言い回しが使われています。

6.3.3 比較：８進数の和積計算 (「筆算」)

十進数の和積計算 (「筆算」) は，小学校低学年で指導されます。
生徒は，これをアタリマエにしていくよう指導されます。
そしてこれをアタリマエにした者は，十進数の和積計算（「筆算」）のロジックに，もはや意識が向かわない者です。
そこで，このロジックを改めて意識し理解するために，これまでやったことのない８進数で，和積計算（「筆算」）を行ってみることにします。

先ず, 和の計算 (「筆算」) ができるために,「足し算九九表」を作成します。
すなわち，つぎの空白のマス目を埋めます：

+	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

このときの計算は，自然数の求和アルゴリズムです。
例えば ６＋４は，つぎの計算になります：

6	4
7	3
10	2
11	1
12	0

こうして，つぎの「足し算九九表」を得ます：

+	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	10
2	3	4	5	6	7	10	11
3	4	5	6	7	10	11	12
4	5	6	7	10	11	12	13
5	6	7	10	11	12	13	14
6	7	10	11	12	13	14	15
7	10	11	12	13	14	15	16

そして, これと「位上がり」規則を合わせることで, 和の計算（「筆算」）ができるようになります：

$$
\begin{array}{rccccc}
 & 5 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
+ & & 7 & 3 & 4 & 6 \\
\hline
 & \overset{1}{6} & 1 & \overset{1}{7} & \overset{1}{1} & 3
\end{array}
$$

つぎに，積の計算（「筆算」）ができるために，「かけ算九九表」を作成します。
すなわち，つぎの空白のマス目を埋めます：

×	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

このときの計算は，先ず，自然数の積の定義に戻ります。
例えば 6× 4は，つぎがこれの意味です：

$$\overbrace{(((6+6)+6)+6)}^{4}$$

そしてこの計算に，和の「筆算」を用いることになります。

こうして，つぎの「かけ算九九表」が得られます：

×	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10	12	14	16
3	3	6	11	14	17	22	25
4	4	10	14	20	24	30	34
5	5	12	17	24	31	36	43
6	6	14	22	30	36	44	52
7	7	16	25	34	43	52	61

そして，これと「足し算九九表」と「位上がり」規則の３つを合わせることで，積の計算（「筆算」）ができるようになります：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 5 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 & & & \times & & 7 & 3 & 4 & 6 \\
\hline
 & & & 3 & \overset{1}{7} & \overset{2}{6} & \overset{3}{5} & \overset{3}{3} & 6 \\
 & & 2 & \overset{1}{5} & \overset{1}{1} & \overset{2}{6} & \overset{2}{2} & 4 & \\
 & 1 & 7 & \overset{1}{7} & \overset{1}{2} & \overset{1}{5} & 7 & & \\
4 & \overset{2\cancel{1}}{5} & \overset{3\cancel{2}}{1} & \overset{4\cancel{3}}{1} & \overset{4}{0} & 3 & & & \\
\hline
4 & \overset{1}{7} & \overset{2}{4} & \overset{1}{1} & \overset{2}{4} & \overset{1}{5} & 6 & 7 & 6
\end{array}$$

十進数の和積の筆算は小学低学年での修得が課されているわけですが，いま８進数の和積の筆算をやってみて，その課題の大きさに思いを致すことができるでしょう。

6.4　0を含む自然数

6.4.1　0を含む自然数

系列の十進生成に使う「0」は，十進の計数法 (§2.3.3) では,「零 (無)」の解釈で処理されていることになります。
実際，例えば「2034 個」が,「1000 個が 2 個，100 個が零個，10 個が 3 個，そして 4 個」のように読まれます。
足し算の筆算では任意の数 n と 0 の和「 $n + 0 = 0 + n$ 」が暗黙に導入され，かけ算の筆算では「 $n \times 0 = 0 \times n = 0$ 」が暗黙に導入されています。

ここから，自然数に「零」を明示的に要素として付加するという考えが出てきます。
すなわち，零個 **0** (太字の「0」で表す) とつぎのように関係する数として，0を導入します：

$$\textbf{個} \xrightarrow{0} \mathbf{0}$$

6.4.2 0との和・積

0を含む自然数の系では,

$$n + 0 = 0 + n = n \quad (「0は，加法の零元」)$$

$$n \times 0 = 0 \times n = 0$$

と定めて，量計算との整合性が得られます。

$$\begin{tikzcd}
& 個 \arrow[dl, "2"'] \arrow[d, "2+0=2"] \arrow[dr, "0"] & \\
2個 & \text{2個と}\mathbf{0} = 2個 & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
個 \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "2 \times 0 = 2"'] & 2個 \arrow[r, "0"] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
個 \arrow[r, "0"] \arrow[rr, bend right, "0 \times 2 = 0"'] & \mathbf{0} \arrow[r, "2"] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

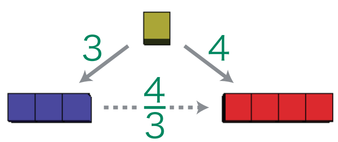
第 7 講　分数比

7.1　分数比の構造

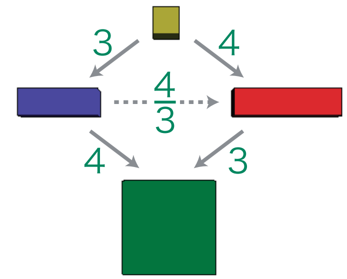
自然数を使った「何個」と言い方ができない場合，あるいはそういう言い方をしたくない場合があります。
このとき,「一個と少し」のような言い方をすることもあります。しかし,「一個と少し」のような表現からは，もとの大きさを再現できません。

分数は，この「もとの大きさをきちんと再現できる表現」の課題に対する解答の一つとして，導入されます。
あわせて,「何個」表現がくずれるこの場面で,「個」の替わりに「単位」,「いくつ」の替わりに「倍」のことばを，それぞれ使うようにします。

分数のアイデアは，倍をつぎのように表現するというものです。――二つの大きさに対して，これらを「３つと４つ」に共約する第三の大きさがとれるとき，二つの大きさの間の倍を「３分の４」と表現します：

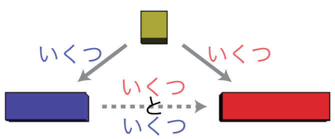


「３分の４」は，「それぞれを３倍，４倍した大きさが同じ」というように定義することもできます。――まとめると，つぎのようになります：



要点を確認しておきましょう。
分数の導入のきっかけは,「いくつ」と表現できない場面との出会いです。

そして分数のアイデアは，一つの「いくつ」で表現できなかったところを，二つの「いくつ」で表現することです。（なんと簡明な解決！）



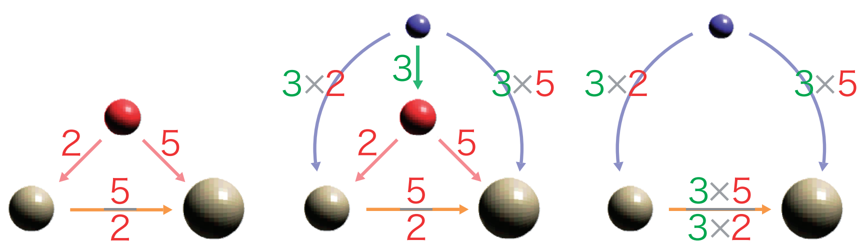
7.2　同値な分数表現の構造

同じ倍関係を表す分数表現は，限りなくあります。実際，一つの分数表現からは，つぎのやり方で，同値な分数表現が限りなく導けます（図中の量は体積をイメージしています）：

(1) 5/2 倍の構造。

(2) 例えば，３倍すると赤の大きさになるものをとる。

(3) もとの二量の関係をこの青の大きさでみると,（３× ５)/(３ ×２）と表現されることになる。



(1)　(2)　(3)

実際，一般に n/m と (n×k)/(m×k) は同値な表現。

7.3　量比較と通分

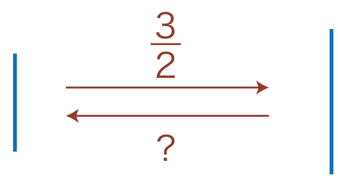
つぎは，量 **q** と **q**′ の大小を比較する方法です：

1.「もとにする量」として量 **u** を導入する。
2. **q** と **q**′をそれぞれ **u** の n / m 倍と n′/ m′ 倍に表現する。
3. n / m と同値な分数と n′/ m′ と同値な分数で，分母が同じであるものを求める。「通分」がこのときに方法になる。
4. 通分された分数で，分子の大小を見る。

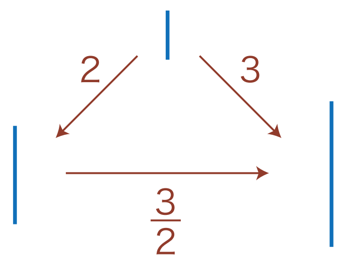
7.4　逆倍

分数 n / m の逆倍は，分子と分母をひっくり返した m / n になります。
この理由をここで確認しておきます。

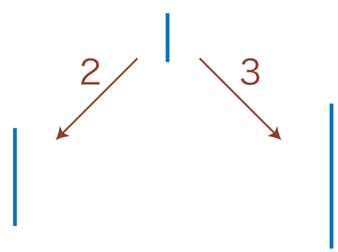
3/2 の逆倍を問題にします：



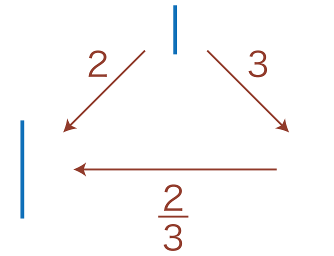
これが，「3/2」の意味です：



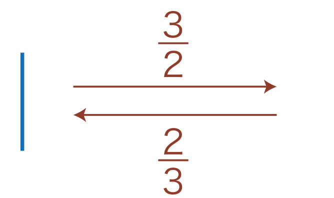
この図から，つぎの部分をとらえます：



これはそのまま，逆倍が 2/3 であることを示しています：



分数の分子と分母をひっくり返すと逆倍になるというわけです：

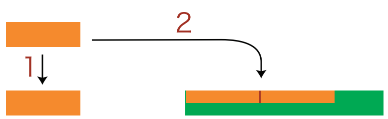


7.5　ユークリッドの互除法

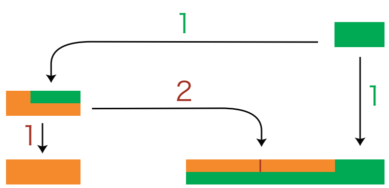
　分数倍の値は，試行錯誤的に物を操作して求めるしかないように，一見思われます。しかしそうではありません。分数の値を求める手順があります。言い換えると，分数を値とするきちんとした測定法があります。——以下がそれです：

(1) 分数で何倍か？

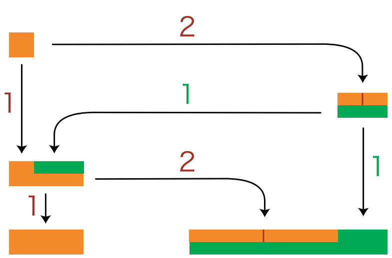
(2) 左が右にいくつ入るか？——２つ入って余りがでる。



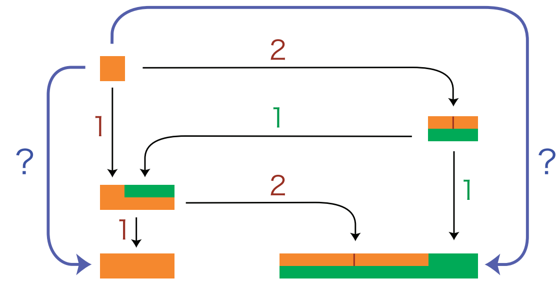
(3) 余りがもとの左にいくつ入るか——１つ入って余りがでる。



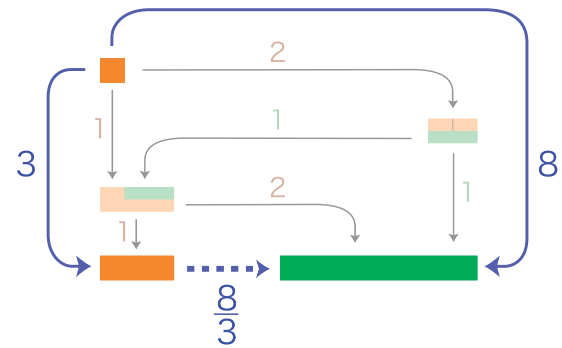
(4) 余りがもとの余りにいくつ入るか——２つ入って余りなし。



(5) 最後の余りが最初の２量にいくつ入るかが，計算で求められる：３と８。



(6) 最初の２つの量を，３つと８つに共約する量がとれたから，求める分数倍は 8/3。



　この手順（余り同士の互除を，余りがなくなるまで続ける）は，ユークリッドの互除法と呼ばれています。ユークリッドの互除法を使うと，つぎの両方が同時に得られます：

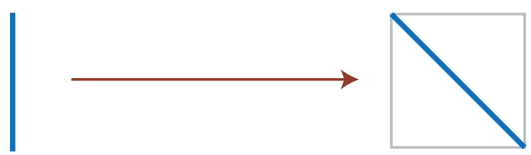
- 二量の共約量（しかも最大共約量）
- 分数の値（しかも既約分数）

7.6　実数の登場

先に,「＜部分のある量＞を扱いたいということで, 分数がつくられる」と言いました。しかしこのとき，つぎの数学的事実にぶつかります：

＜部分のある量＞の比のうちには,
分数 (自然数２つ) では表現できないものがある。

中学数学で扱える内容としては，つぎの線分の長さの比が「分数で表現できない」ものになります：



（右は正方形の対角線で，正方形の辺は左の線分と同じ長さ）

そこでこのような比も扱えるように，分数を拡張することにしました。そしてつくられたのが，「実数」です。

実数を説明しようとすると，かなり専門的な話になります。したがって，ここでは実数に立ち入りません。 ――このテキストでは，つぎのように (曖昧な形で) 受け止めてもらえば，十分です：

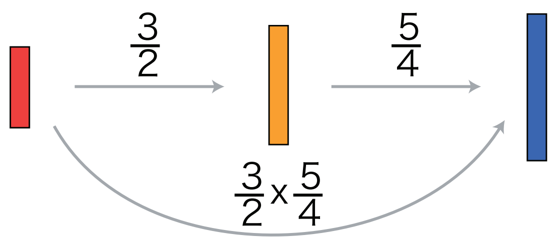
「*分数で表現できない比も扱えるよう分数を拡張したのが，実数。*」

第８講　分数の積・和

8.1　分数の積

分数の求積公式は，正負の数や複素数の場合と比べてずっと複雑です。したがってこのテキストでは，これを正負の数，複素数の後にもってきました。

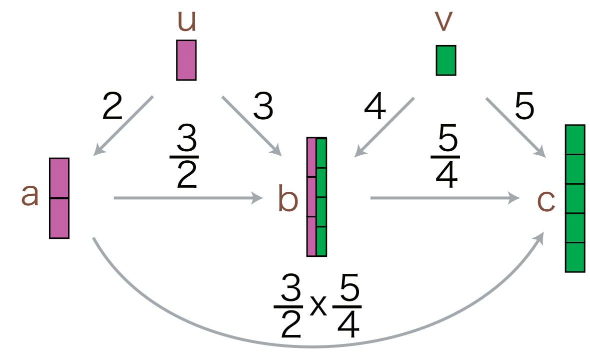
さて，数の積は，倍の合成として定められます。そこで分数の場合，つぎのようになります (倍は，長方形のタテの長さに関する倍)：



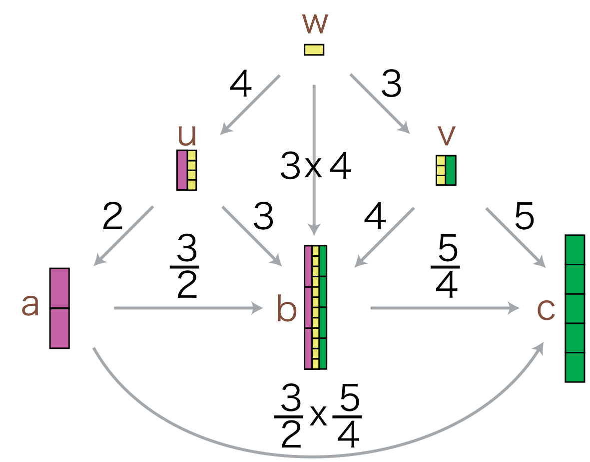
この関係が成り立つようにするには，分数の積をどのように定めたらよいでしょう？

「3/2 × 5/4」が表す分数を求めてみます。

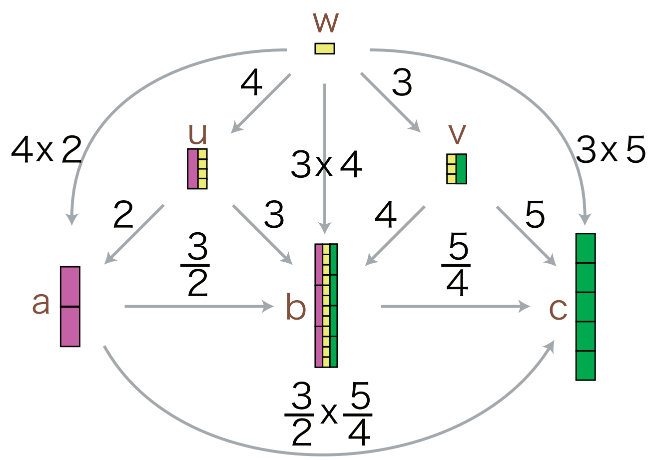
1. 分数 3/2，4/3 の意味により，下図の条件を満たす量 u, v がとれる。



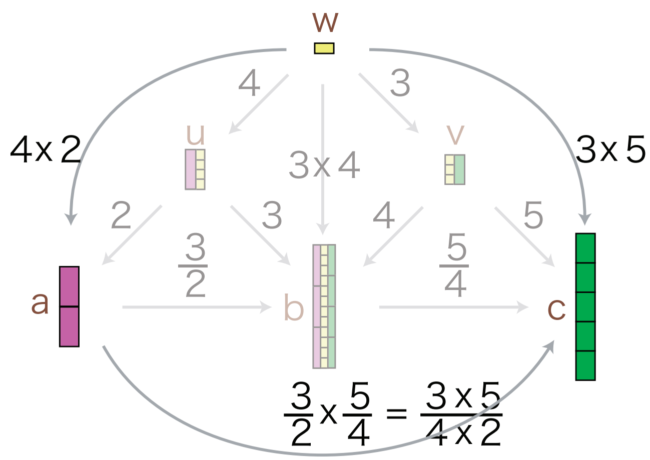
2. u の 3 倍と v の 4 倍が同じであることから，下図の条件を満たす量 w がとれる。



3. a は w の (4 × 2) 倍，c は w の (3 × 5) 倍。
   すなわち，a と c は，w によって (4 × 2) : (3 × 5) の比になっている。



4. よって，a に対する c の比は，(3 × 5)/(4 × 2)。

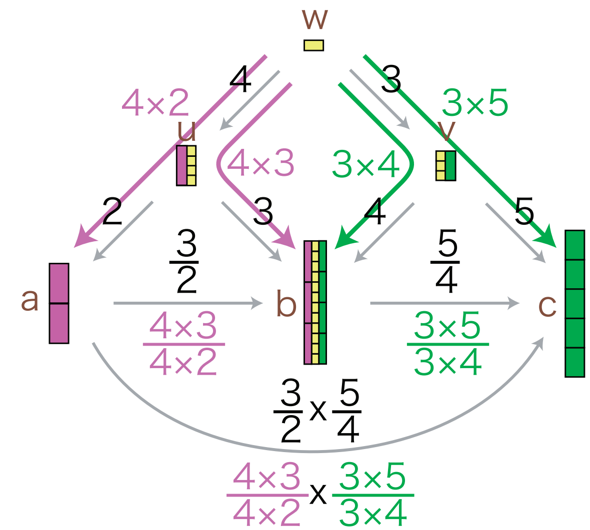


この例から類推して，求積の公式がつぎのようになることがわかります：

$$\frac{n}{m} \times \frac{q}{p} = \frac{n \times q}{m \times p}$$

通分

量 w は，「u ,v に共通の分割を求める」という方針で求めています。
w を得て，この w から 比 3/2 : a → b，5/4 : b → c を見るとき，2 つの比はそれぞれ (4 ×3)/(4 ×2)，(3 ×5)/(3 ×4) になっています。
特に，(3/2)×(5/4) は，(4 ×3)/(4 ×2)×(3 ×5)/(3 ×4) になります。



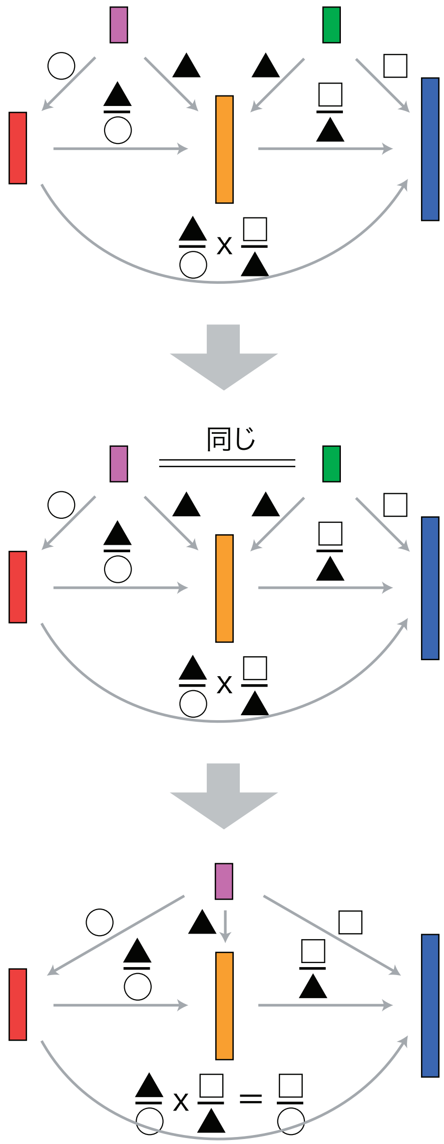
これは何を意味しているでしょう？
「u ,v に共通の分割を求める」は，「3/2 の分子と，5/4 の分母を通分する」に対応しているということです。
つまり，つぎの形をつくっているわけです：

$$\frac{\blacktriangle}{\bigcirc} \times \frac{\square}{\blacktriangle}$$

この形の積の場合，求積公式はつぎのようになります――これが，分数の積の基本形（分数の和における「同分母分数の和」に対応するもの）ということになります：

$$\frac{▲}{○} \times \frac{□}{▲} = \frac{□}{○}$$

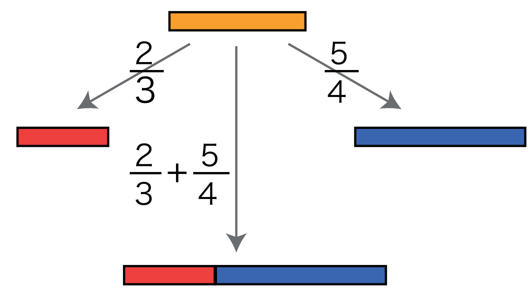
以下が，この求積公式の理由です：



8.2　分数の和

　分数の求和公式は，正負の数や複素数の場合と比べると複雑です。したがってこのテキストでは，これを正負の数，複素数の後にもってきました。

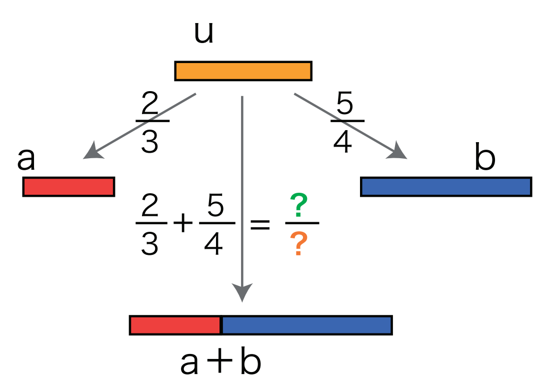
　さて，数の和は 倍の和として定められます。そこで分数の場合，つぎのようになります (倍は，長方形のヨコの長さに関する倍)：



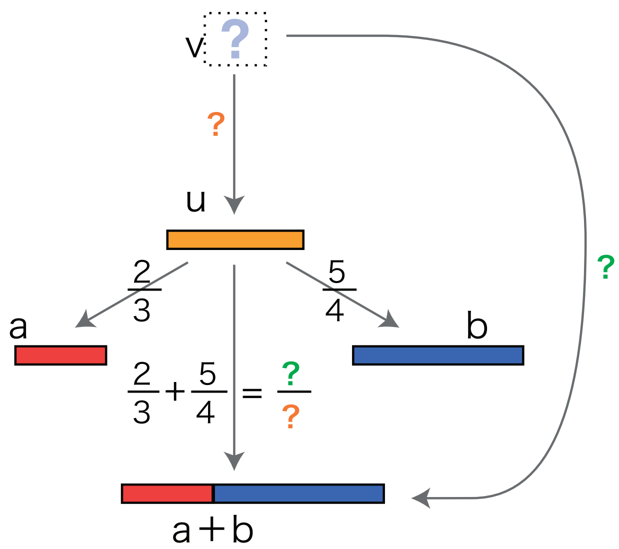
この関係が成り立つようにするには，分数の和をどのように定めたらよいでしょう？

　そこで実際に「2/3 + 5/4」が表す分数を求めてみます。

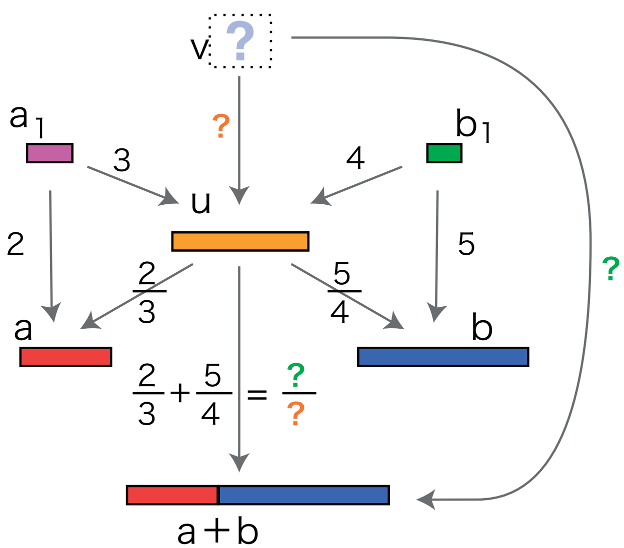
1.「2/3 + 5/4」が表す分数「?/?」を求めるとは，どういうことか？



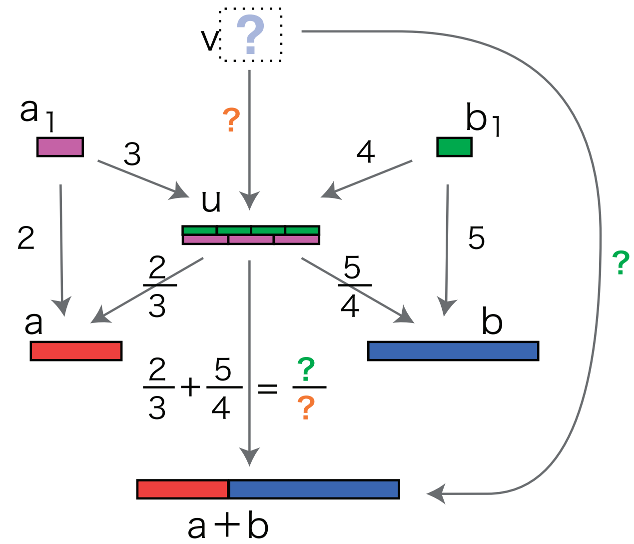
2. それは，つぎのような量 v を求めること：



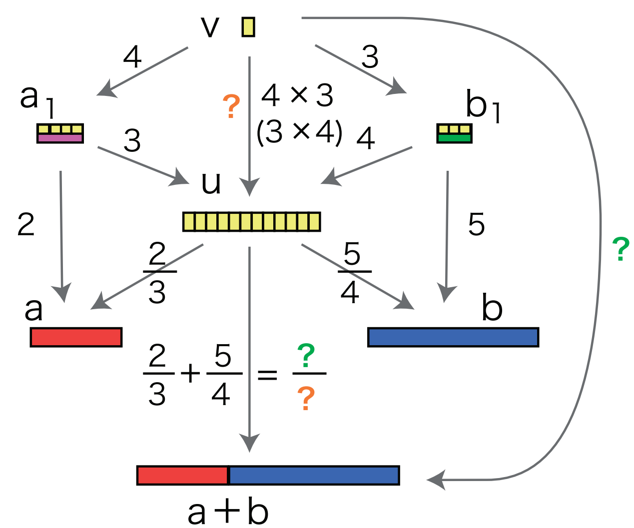
3. 分数 2/3, 5/4 の意味により，つぎのような量 a $_1$, b $_1$ がとれる：



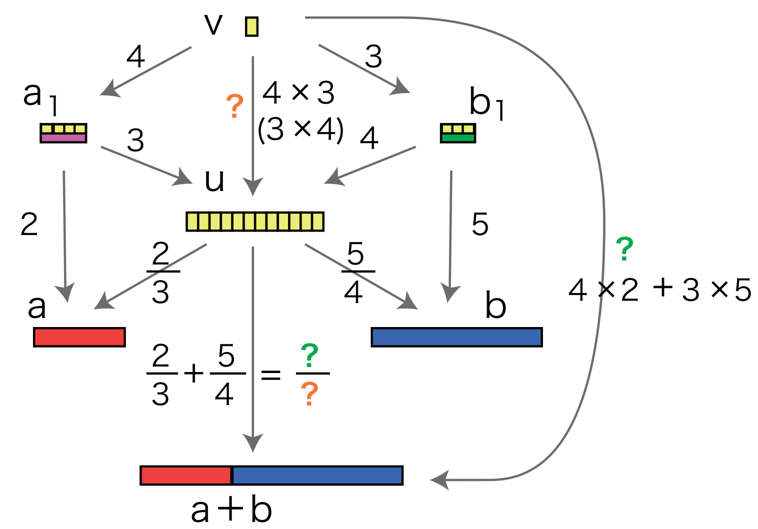
4. a $_1$ と b $_1$ を共約する量として v が求まればよい。
—a $_1$ の 3 倍と b $_1$ の 4 倍が同じであることが，v を求めるヒント：



5. 4 倍して a $_1$ になる量と 3 倍して b $_1$ になる量は，同じ。
これが，a $_1$ と b $_1$ を共約する量 v になる。



6. aはvの 4× 2倍, bはvの3× 5倍。よって, a＋bはvの (4×2＋3× 5) 倍。
また, uはvの3× 4倍。



7. これで, 分数「?/?」が求まった：

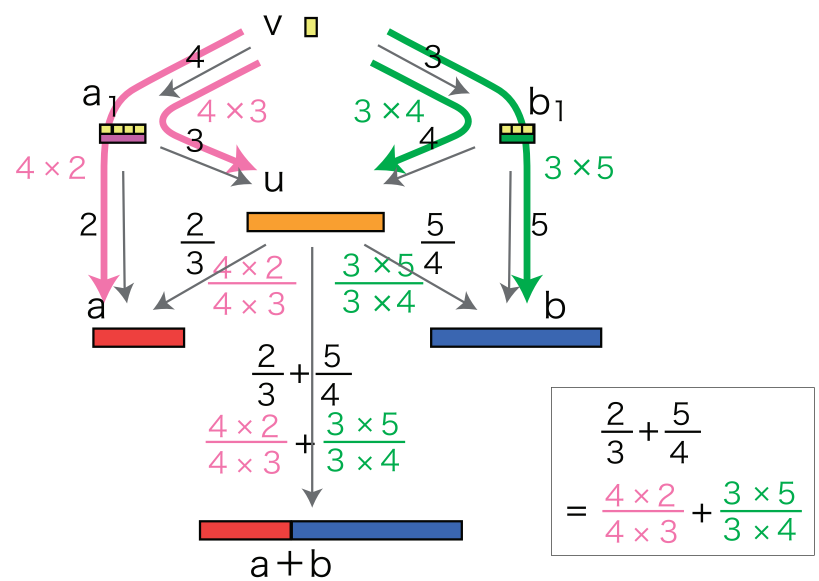
$$\frac{2}{3}+\frac{5}{4}=\frac{4\times2\ +\ 3\times5}{3\times4}$$

そしてこの例から類推して, 求和の公式がつぎのようになることがわかります：

$$\frac{n}{m}+\frac{q}{p}=\frac{n\times p\ +\ m\times q}{m\times p}$$

通分

量vは, 「a_1, b_1 に共通の分割を求める」という方針で求めています。vを得て, このvから 比 2/3：u→a, 5/4：u→b を見るとき, 2つの比はそれぞれ (4× 2)/(4× 3), (3× 5)/(3× 4) になっています。
特に, (2/3) ＋ (5/4) は, (4× 2)/(4× 3) ＋ (3× 5)/(3× 4) になります。



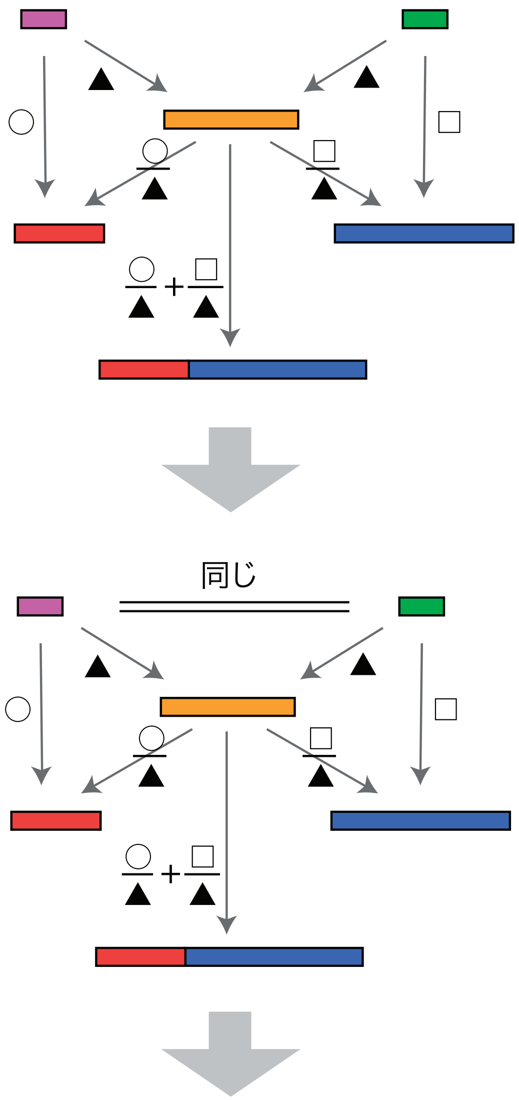
これは何を意味しているでしょう？
「a_1, b_1 に共通の分割を求める」は, 「分数 2/3, 5/4 を通分する」に対応するということです。
つまり, つぎの形をつくっているわけです：

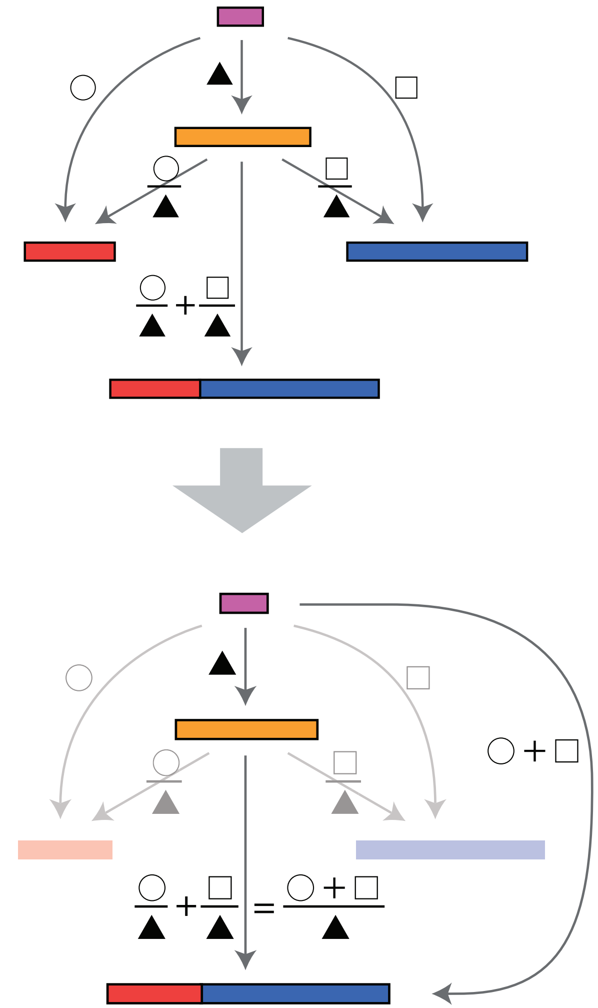
$$\frac{\bigcirc}{\blacktriangle}+\frac{\square}{\blacktriangle}$$

この形の和の場合, 求和公式はつぎのようになります：

$$\frac{\bigcirc}{\blacktriangle}+\frac{\square}{\blacktriangle}=\frac{\bigcirc+\square}{\blacktriangle}$$

以下が，この求和公式の理由です：





第９講　小数

9.1　小数の数としての位置

9.1.1　小数の数としての位置

「小数」は，それ自体で数の系として成り立つところの，れっきとした数です。
系としての小数は，数学的に，分数の系に埋め込んで考えることができます。しかしだからといって，「小数は分数の特別なもの」というのではありません。

9.1.2　対象とする量：稠密量

小数で対象になる量は，分数で対象になる量と同じです。すなわち，「任意に部分をとれる」という意味での稠密量です。
稠密量における２量の比 (倍関係) を表現する仕方の違いが，分数と小数という２種類の数になって出てきます。

9.1.3　十進数の延長

分数と小数が対象とする量は，ともに稠密量ということで，同じです。しかし，日常生活では小数がもっぱら使われます。それは，小数が十進数の延長になるからです。

十進数による個数の数え方は，

　　　　・・・・
　　　　10 個の 10 個の 10 個
　　　　10 個の 10 個
　　　　10 個
　　　　個

の単位システムを予めつくっておいて，

　　　　・・・・
　　　　10 個の 10 個の 10 個がいくつ $_{(3)}$
　　　　10 個の 10 個がいくつ $_{(2)}$
　　　　10 個がいくつ $_{(1)}$
　　　　個がいくつ $_{(0)}$)

　　　　(「いくつ $_{(k)}$」は ０〜９）

と数えます。このとき，

　　・・・・ [いくつ $_{(3)}$] [いくつ $_{(2)}$] [いくつ $_{(1)}$] [いくつ $_{(0)}$]

が個数と一致します。

この方法を，素直に拡張 (延長) します。すなわち，単位からつぎの単位システムを導きます：

・・・・
単位の 10 倍の 10 倍の 10 倍
単位の 10 倍の 10 倍
単位の 10 倍
単位
単位の 10^{-1} 倍
単位の 10^{-1} 倍の 10^{-1} 倍
単位の 10^{-1} 倍の 10^{-1} 倍の 10^{-1} 倍
・・・・

そして，量をつぎのように測ります：

・・・・
単位の 10 倍の 10 倍の 10 倍がいくつ $_{(3)}$
単位の 10 倍の 10 倍がいくつ $_{(2)}$
単位の 10 倍がいくつ $_{(1)}$
単位がいくつ $_{(0)}$
単位の 10^{-1} 倍がいくつ $_{(-1)}$
単位の 10^{-1} 倍の 10^{-1} 倍がいくつ $_{(-2)}$
単位の 10^{-1} 倍の 10^{-1} 倍の 10^{-1} 倍がいくつ $_{(-3)}$
・・・・

(「いくつ $_{(k)}$」は ０～９)

そして，つぎを倍の表現にします：

・・・・ [いくつ $_{(3)}$] [いくつ $_{(2)}$] [いくつ $_{(1)}$] [いくつ $_{(0)}$] .
[いくつ $_{(-1)}$] [いくつ $_{(-2)}$] [いくつ $_{(-3)}$] ・・・・

「.」は，どれが [いくつ $_{(0)}$] であるかを示すための記号で，「小数点」と

呼びます。
[いくつ] をただ並べただけでは, 倍の表現が一意になりません。そこで,「小数点」のような工夫が必要になるわけです。

この方法で表現された倍は，０～９と小数点がつくる文字列になっています。この文字列を「数」と定めて，「小数」と呼びます。
「数」と定める根拠は，これが倍の表現になっており，そして (この後で示されるように)「数の和・積」をこれに対して定義することができるからです。

小数による量表現は，十進数による個数表現とつぎのように密接につながっています：

単位の
[いくつ $_{(n)}$] ・・・・ [いくつ $_{(1)}$] [いくつ $_{(0)}$] . [いくつ $_{(-1)}$] ・・・・ [いくつ $_{(-m)}$]
↑ (小数点)
倍は，＜単位の 10^{-m} 倍＞の
[いくつ $_{(n)}$] ・・・・ [いくつ $_{(1)}$] [いくつ $_{(0)}$] [いくつ $_{(-1)}$] ・・・・ [いくつ $_{(-m)}$]
倍。

そしてこれを用いることで，小数の和・積の筆算法が導かれます。
すなわち，小数の和・積は，十進数の和・積の筆算と小数点の処理を合わせる形で，求められるものになります。

以下，ここで概略述べたことを，順に見ていきます。

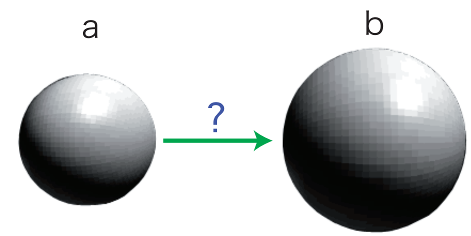
9.2　小数倍

分数が自然数に替わって倍表現の道具になるような場面とは，自然数では「はんぱな量」が出てきてしまう場面のことです。しかし，これが生活の場面であるときには，多くの場合（ほとんどの場合），分数ではなく「小数」と呼ばれる倍の表現が使われます。

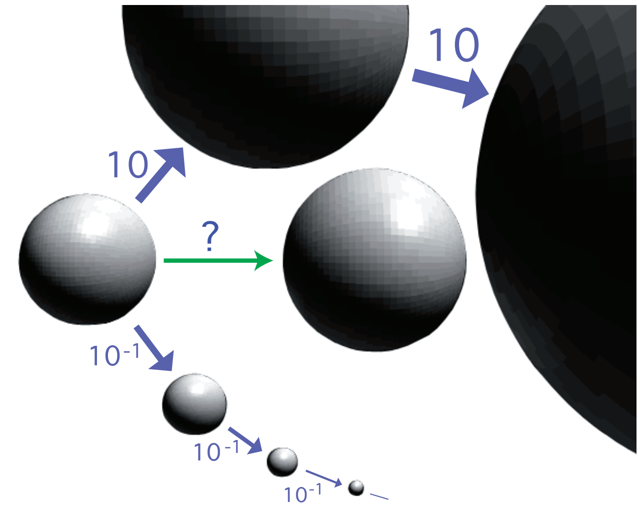
9.2.1　「小数」という形の倍表現

「小数」という形の倍表現は，つぎの規則でつくられます。(量イメージは体積です。)

(1) つぎの二つの体積の間の比 (倍関係) が問題になっているとします：

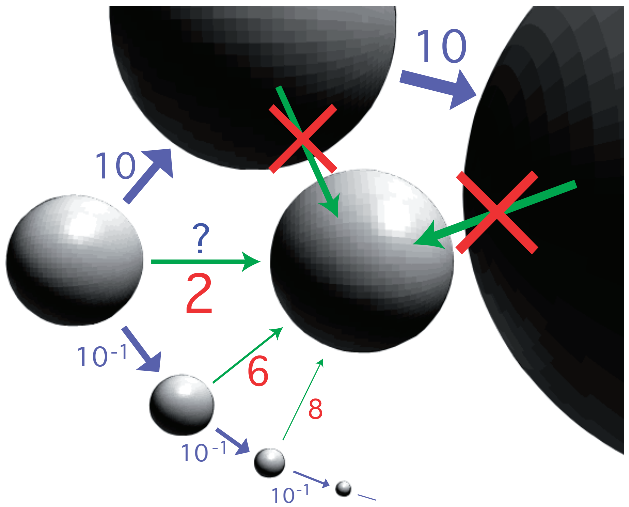


(2) もとにする量 a に対し，これを基にした十進の単位システムを導きます：

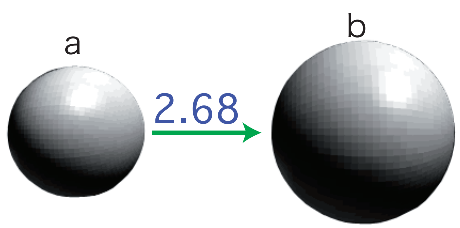


(3) 大きい単位の方から順に，比べる量 b にいくつ入るか数えていき

ます。――余りが出たら，それの一つ下位の単位で同じことをします。

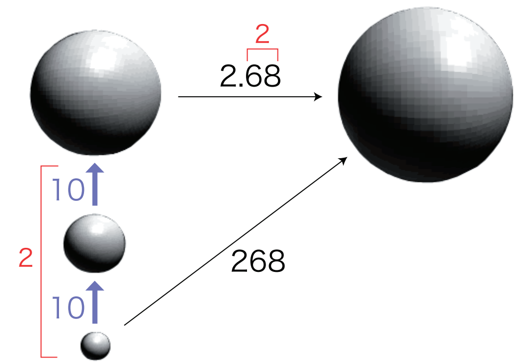


(4) 操作の結果が上のようになったとき，求める比 (倍関係) をつぎのように倍表現します。――もとにする量 a に対応する数値を示すために「小数点」を使います。

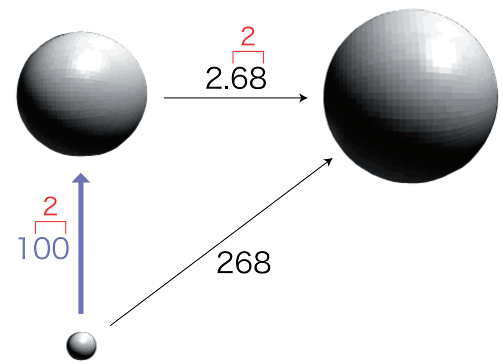


9.2.2「小数」の文法

小数倍――例えば，2.68 倍――は，つぎのように分析されます：



結局，



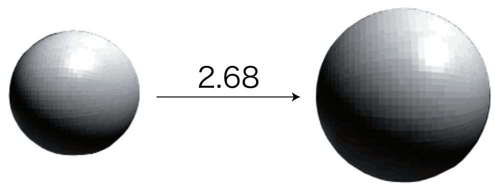
要点は，つぎの２つです：

1.「2.68」から小数点をとった「268」が，どんなふうに現れるか？
2.「2.68」の小数点以下の数字の個数２が，どんなふうに現れるか？

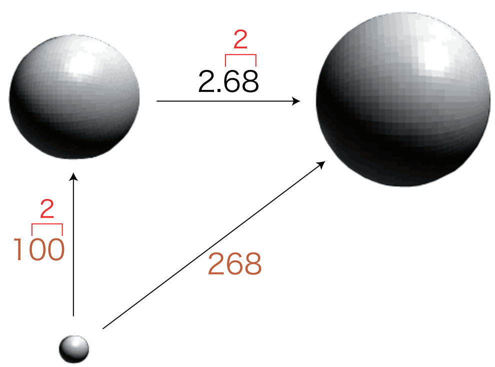
小数点以下の数字の個数は，＜10‥‥0 倍＞の０の個数と対応しているわけです。

9.2.3 小数を分数に翻訳

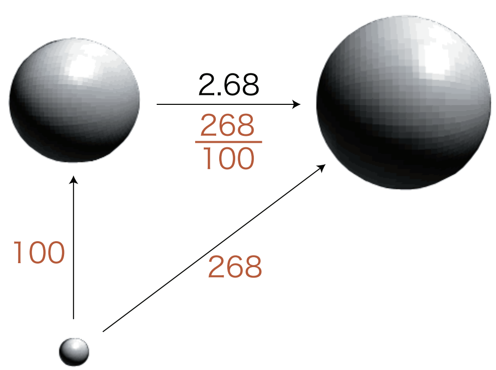
小数から分数への換算法の理由 (説明の仕方) も，念のため確認しておきましょう。小数「2.68」を例にします：



この表現の意味は，つぎのようになります (「小数点」の文法)：



分数の定義から：



結局，つぎの規則で，小数が分数に翻訳されることになります：

小数の小数点を除いて得られる整数を，分子に。
1 の後ろに<小数点以下の数の個数>だけ 0 をつけた整数を，分母に。

$$\overset{2}{2.68} = \frac{268}{\underset{2}{100}}$$

9.3　小数の積・和

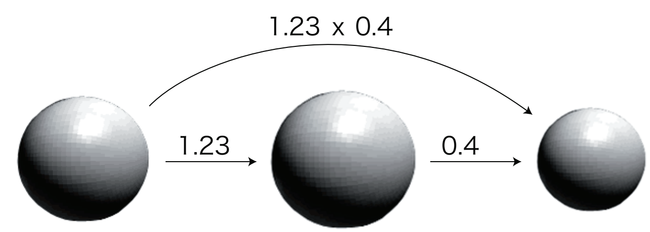
比 (倍) の表現としてつくられた小数では，倍の和，倍の合成として，和と積が定義されます。こうして小数は，確かに「数」と呼ばれるものになります。

9.3.1 小数の求積計算

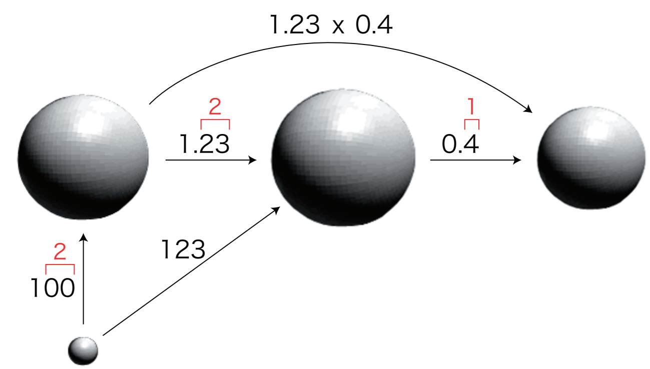
小数の求積計算は，つぎのものです：

２つの小数の小数点を無視して，かけ算をする。
２つの小数の小数点以下の桁数を足す。
この数が小数点以下の桁数になるように，かけ算で出した数に小数点をつける。

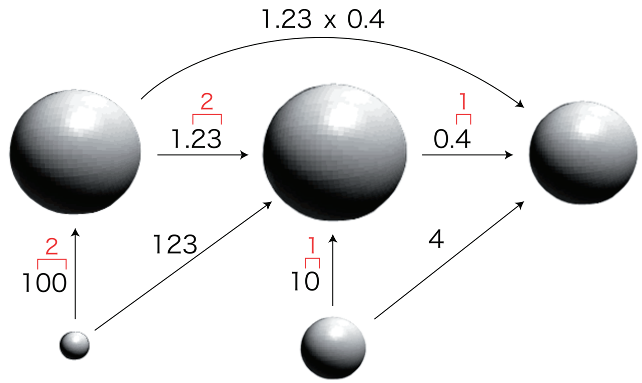
この計算法の理由は，つぎのようになります。――例として 1.23 × 0.4 を考えます：



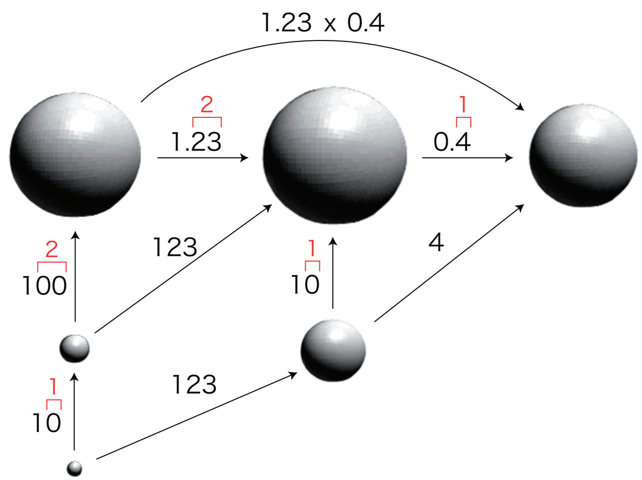
「1.23」を分析 (「小数点」の文法)：



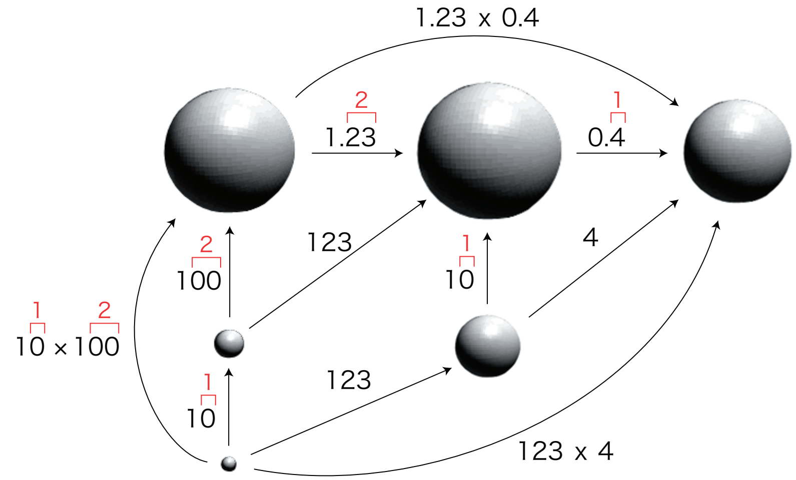
「0.4」を分析：



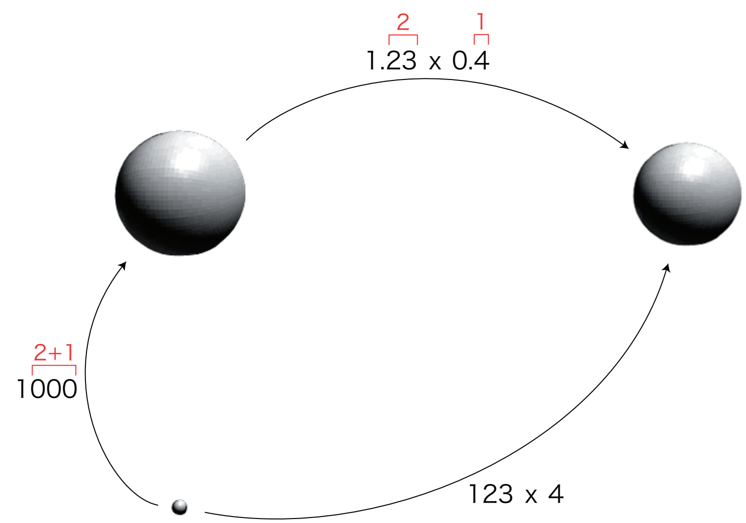
「10 × 123 = 123 × 10」：



「×」の文法：



つぎの図式に到達：



この図式は，つぎのことを示します (§「小数」の文法)：

「1.23 × 0.4 の表す小数は,
123 × 4 の値の下 (2 + 1) 桁を小数点以下にしたもの。」

なお,「小数を分数に翻訳」と「分数の積」を既習として使うことにすれば, 小数の求積計算法の説明が，上に示したものより簡単になります：

1. 小数を分数に替える。
2. 分数の積を求める（分子同士をかけ，分母同士をかける)。
3. 得られた分数を，小数に替える。

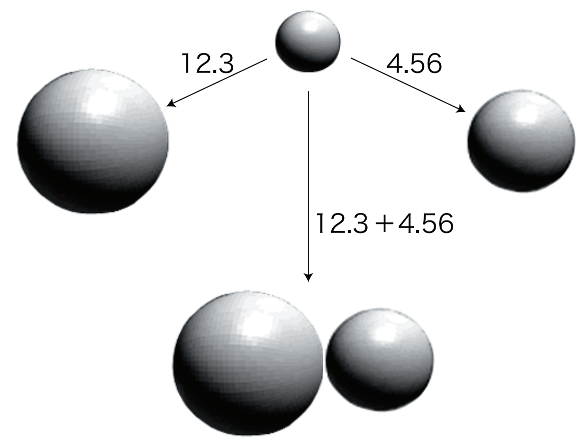
このとき,「分子同士をかける」が「整数計算」に ,「分母同士をかける」が「小数点の位置の計算」に，それぞれ対応しています。

9.3.2 小数の求和計算

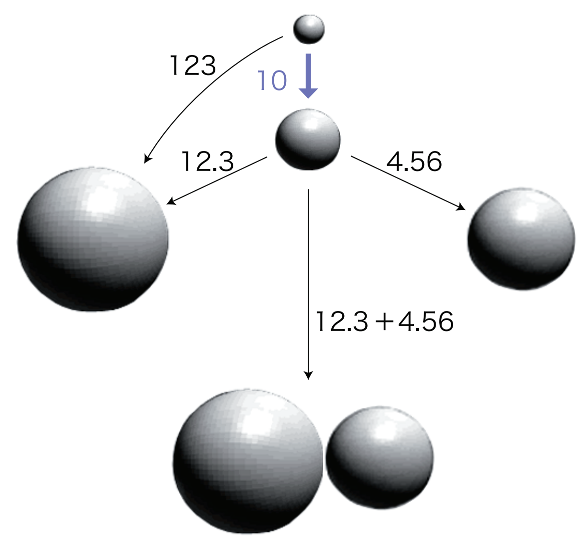
小数の求和計算は，つぎの２つを合わせたものになります：

「小数点の位置で並べる」
「自然数の求和計算」

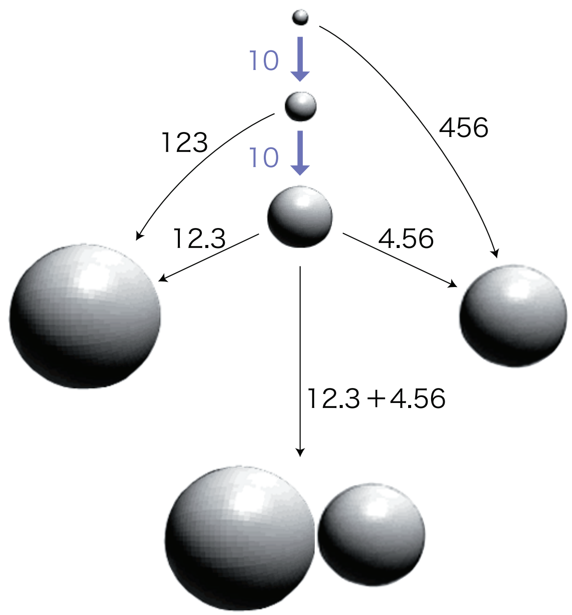
この計算法の理由は，つぎのようになります。——例として 12.3 ＋ 4.56 を考えます：



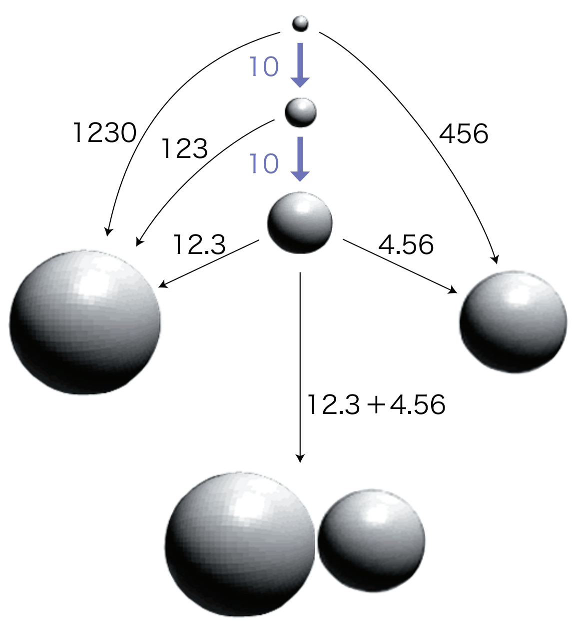
「12.3」を分析 (「小数点」の文法)：



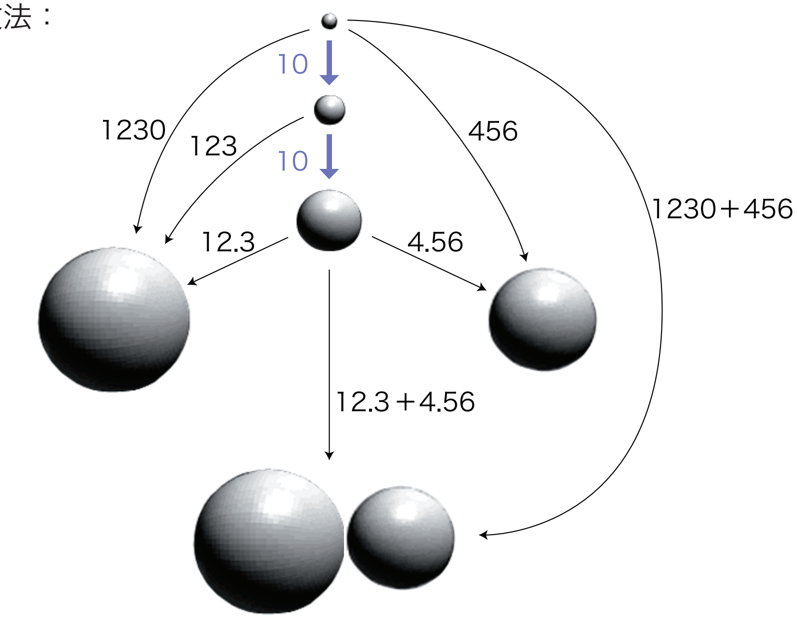
「4.56」を分析：



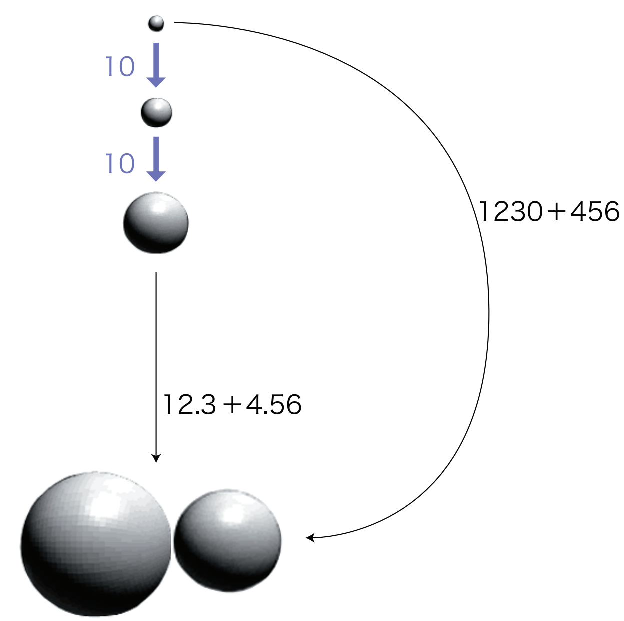
最小単位をそろえる：



「＋」の文法：



つぎの図式に到達：



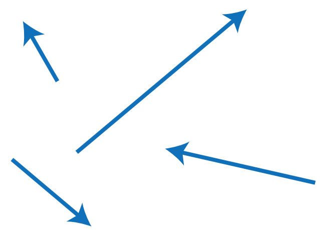
この図式は，つぎのことを示しています (§「小数点」の文法) :

「12.3 ＋ 4.56 の表す小数は，小数点をそろえ
形の上で 1230 ＋ 456 の計算をして，得られる。」

第10講　複素数の表記「a+ bi」

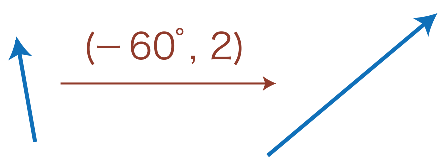
10.1　複素数の表記「a＋b i」

複素数に対応する量は，平面上方向自由な向きと大きさをもつ量です：



平面上方向自由な向きと大きさをもつ量の比 (倍関係) は，つぎの 2 つの情報の組で表せます：

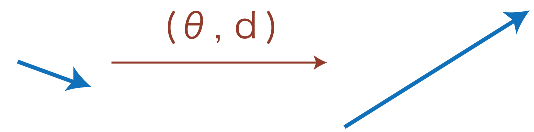
1. 向きの変換に関する情報：どれだけの回転になっているか (角度)。
2. 大きさの変換に関する情報：大きさの比を既知の数で表す。



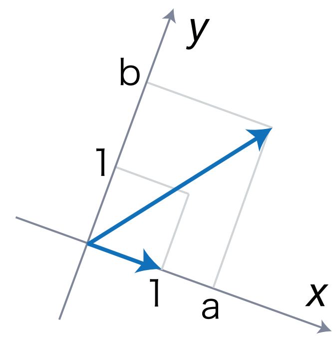
これが複素数になるわけですが，しかし複素数をこのように説明すると，「*高校で習った複素数はこんなんじゃない。高校では a + b i みたいに習った。*」のことばが返ってきそうです。

表現「a + b i」のしくみを，説明しましょう。

ここに (θ, d) と表現されている比があります：



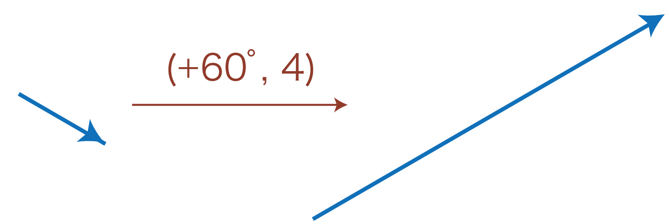
左辺のベクトルをもとに x y 座標を作成し，この座標の中に右辺のベクトルをおきます：



(y 軸の正方向は「x 軸の +90˚ 回転」のルールで決められる)

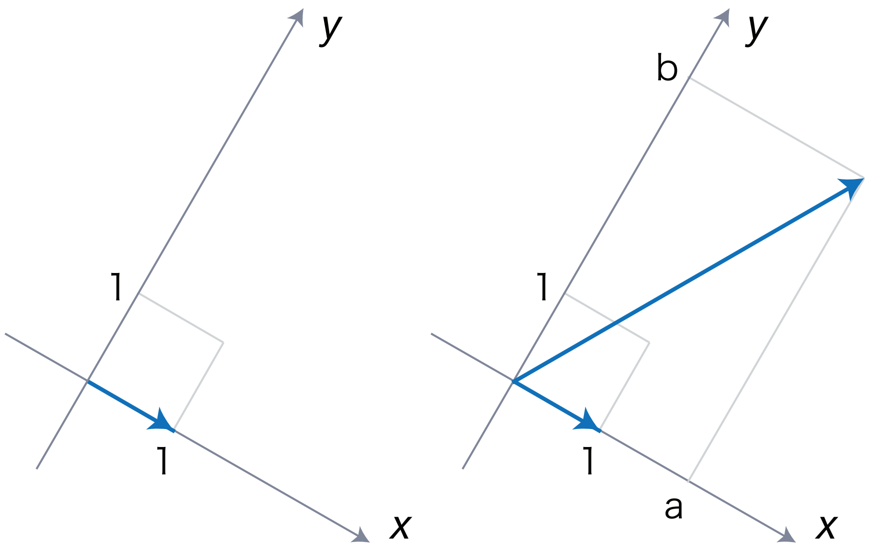
そしてこのときの a, b を使って，「a + b i」を (θ, d) の別表現とします。

練習として，具体的な例でやってみましょう：



左辺のベクトルをもとに x y 座標を作成し，この座標の中に右辺のベ

クトルをおきます：



このときのａ，ｂは，それぞれ ２ と ２√３ です。よって，(+60°，4) は ２＋２√３ i。

　高校で複素数を習ったひとは，実はこの２つの表現とその換算法も学習しています。（しかしほとんどのひとは，これの意味を知らないで／意識しないで過ごしてきています。）

　複素数ｚの二つの表現ａ ＋ ｂ ｉと（θ，ｄ）に対し，ｚの偏角と呼ばれ arg(ｚ) と表記されたのが θ で，ｚの絶対値と呼ばれ｜ｚ｜と表記されたのがｄです。

　そして以下が，換算法です：

$$(\theta, d) \longrightarrow a+bi$$

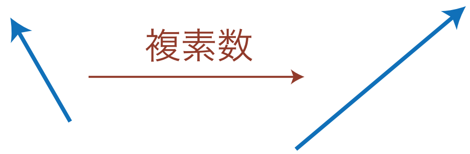
$$a = d\cos\theta$$
$$b = d\sin\theta$$

$$(\theta, d) \longleftarrow a+bi$$

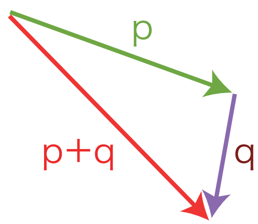
$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$
$$d = \sqrt{a^2+b^2}$$

10.2　複素数の和

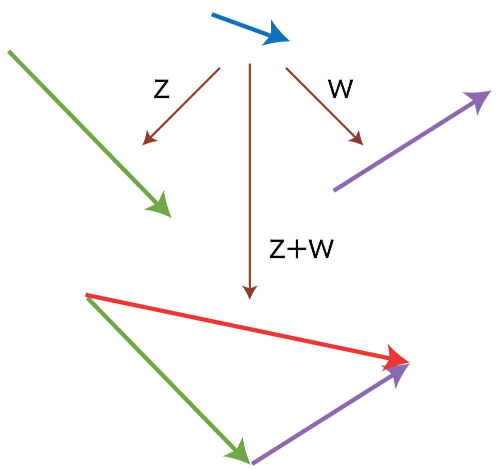
複素数は，＜平面上方向自由な量＞の比を表します：



また，＜平面上方向自由な量＞の和は，つぎのように決められました：



そこで，複素数の和は，つぎのようになります：



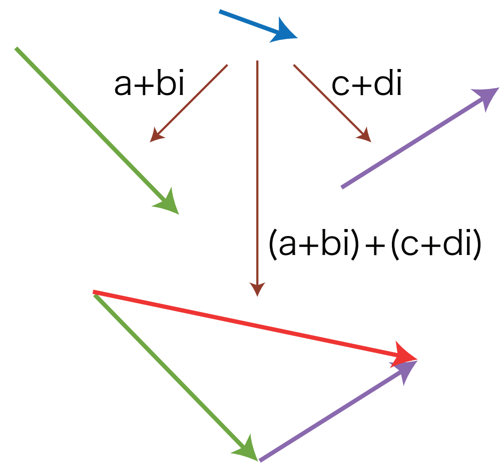
＜平面上方向自由な量＞の比である複素数には，２つの表現方法があります：

(1) 回転角度 θ と大きさの倍 d の組 (θ，d)

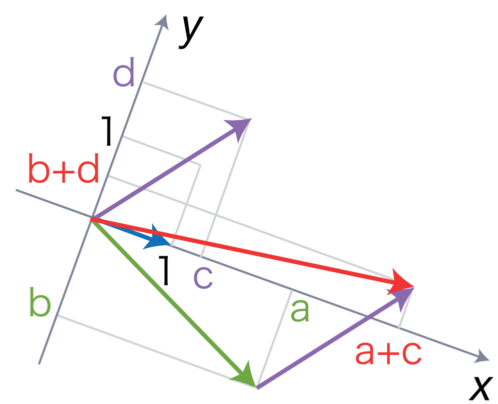
(2) a＋b i

複素数の求積では (θ，d) の表現が便利ですが (§5.2.3 複素数の求積公式)，求和の場合は a＋b i の表現が便利になります。

実際，



とするとき，つぎの関係が成り立ちます：



したがって，つぎが求和公式になります：

（ａ＋ｂｉ）＋（ｃ＋ｄｉ）＝（ａ＋ｃ）＋（ｂ＋ｄ）ｉ

注意：上の公式には３種類の「＋」があります：

(1) 複素数の表記の「＋」

(2) 複素数の和の記号「＋」

(3) 複素数の構成に使われた既知の数の和の「＋」

すなわち，つぎのようになります：

（ａ＋ｂｉ）＋（ｃ＋ｄｉ）＝（ａ＋ｃ）＋（ｂ＋ｄ）ｉ

第11講　数の差と商（「−」「÷」の文法）

11.1　差 (「−」の文法)

11.1.1　差の意味 (記号「−」の文法)

２数 m , n の差「n − m」は,「m と足して n になる数」の言い換え (表記) として導入されます。——すなわち, つぎの式を満たす数「?」を「n − m」と書くということです：

$$m + ? = n$$
$$? + m = n$$

例えば,「３ − ２」は「２と足して３になる数」,「(３ − ２) − ５」は「5 と足して (２と足して３になる数) になる数」です。

量については「和の可換性」を条件にします。このことから数の和も可換となります。したがって,「n − m」を上のように定めることができます（すなわち, 上の２つの式を満たす「？」が同じになります)。

なお,「n − m を導入できる」ということは ,「n − m が存在する」ということとは別問題です。例えば自然数で,「2 − 3」は意味 (「２と足して３になる数」) を持ちますが, これで表される自然数は存在しません。

「差」の意味 (記号「−」の文法) は, 以上述べたことですべてです。特に,「−」には「引く / 取り去る / 除く」といった力仕事の意味はありません。(正負の数や複素数の場合を考えれば, このことは簡単に了解されるでしょう。)
「−」に対して「引く / 取り去る / 除く」を意味として感じてしまうのは, 小学算数のところで「引く / 取り去る / 除く問題に対して差の式を立て

る」が訓練され，その中で道具 (数，差の式) とそれの応用対象 (引く / 取り去る / 除く問題) を混同する習慣をつけられてしまったからです。

11.1.2　正負の数における３種類の「−」の区別

正負の数の学習では，３ 種類の「−」と出会うことになります：

負符号　(ー , 3/2)　(§2.3 正負の数の表記のきまり)
差の記号　(ー , 3/2) − (＋ , 4/5)　(§8.2 記号「−」の文法)
対称化記号　ー (ー , 3/2) ＝ (＋ , 3/2)

対称化記号の「−」とは，０ をもつ数において，つぎのように定義されるところのものです：

「数 n と足して 0 になる数を −n と書く。」

例：(ー , 3/2) と足して ０ になるのは (＋ , 3/2) ですから，ー (ー , 3/2) ＝ (＋ , 3/2) となります。

確認：つぎの式に現れる「−」は，左から順に，差の記号，対象化記号，負符合です：

(＋ , 4/5) ー (ー (ー , 3/2))

11.2　商 (「÷」の文法)

11.2.1　商の意味 (記号「÷」の文法)

２数 m，n の商「n ÷ m」は,「m と掛けて n になる数」の言い換え (表記) として導入されます。——すなわち, つぎの式を満たす数「?」を「n ÷ m」と書くということです：

$$m \times ? = n$$
$$? \times m = n$$

このように定めてよいのは，この２つの式を満たす「？」が同じになる場合です。

自然数，分数，正負の数，複素数では，積の可換性が成り立ちますので，「？」は同じになります。よって，商「n ÷ m」を導入してよいことになります。

注意 :「積の可換性」は四元数になると成立しません。よって「積の可換性」を「数」の条件にはしません。

なお，「n ÷ m を導入できる」ということは ,「n ÷ m が存在する」ということとは別問題です。例えば自然数で，「2 ÷ 3」は意味（「２と掛けて３になる数」）を持ちますが，これで表される自然数は存在しません。

比較 :「体長 100m の魚」は，それが存在するかどうかと関係なく，ことばとして意味をもちます。

「商」の意味 (記号「÷」の文法) は，以上述べたことですべてです。

特に，「÷」には「分ける」といった力仕事の意味はありません。(分数や複素数の場合を考えれば，このことは簡単に了解されるでしょう。)

「÷」に対して「分ける」を意味として感じてしまうのは，小学算数のところで「分ける問題に対して商の式を立てる」が訓練され，その中で道具（数，商の式）とそれの応用対象（分ける問題）を混同する習慣をつけられてしまったからです。

11.2.2 0を含む商の式

(1)「1 ÷ 0」

数学の授業の現場では，「0 でわる除法を考えない」という指導をしているところがあるかも知れません。すなわち，生徒に「÷ 0」をタブーと理解させる指導です。この指導は，教育的方便で行うのでないとしたら，誤りです。

「1 ÷ 0」は無意味ではありません。「0 とかけて 1 になる数」という意味があります。(一般に「m ÷ n」は,「n とかけてmになる数」の言い換えでした。）正しい指導は，つぎのように言うことです：*「1 ÷ 0」と表される数は存在しない（「存在が不能」)*。

「意味がある / ない」と「存在する / しない」は，別のことです。これを区別しましょう。

(2)「0 ÷ 0」

「0 ÷ 0」は「0 とかけて 0 になる数」。ところで，すべての数が「0 とかけて 0 になる数」です。すなわち，「存在が不定」。

(3)「0÷1」

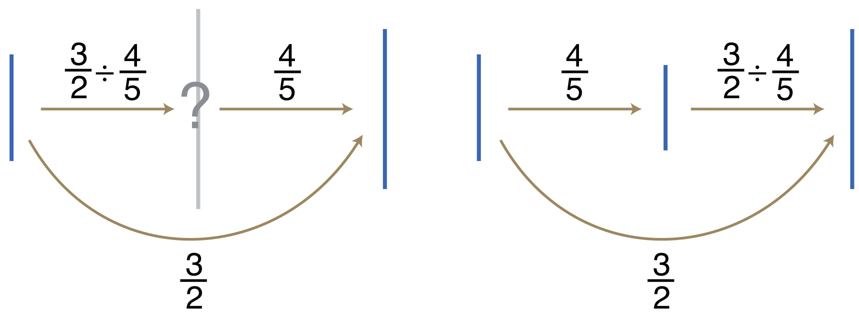
「0÷1」は「1 とかけて 0 になる数」。これは 0 です。

11.2.3 分数の求商公式

例として，3/2 ÷ 4/5 を考えましょう。

商の定義 (記号「÷」の文法) より，この式の意味はつぎのようになります：

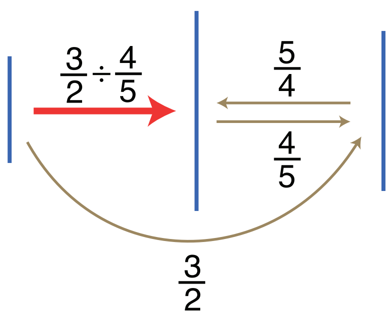
「$\frac{3}{2} \div \frac{4}{5}$」の意味:「$\frac{4}{5}$ と掛けて $\frac{3}{2}$ になる数」



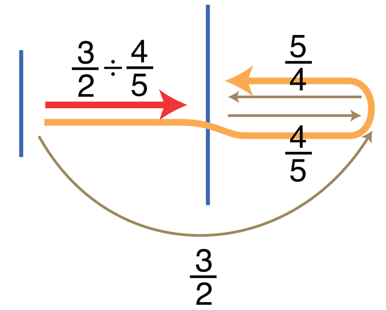
そしてこの２つの図のそれぞれから，つぎの等式変形が導かれます。

左図からは：

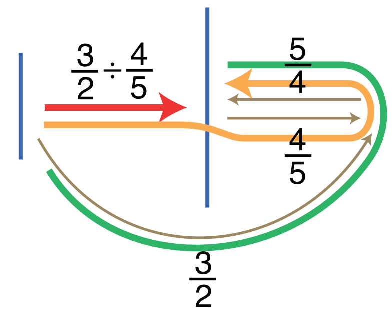
$$\frac{3}{2} \div \frac{4}{5}$$



$$= \left(\frac{3}{2} \div \frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{4}{5} \times \frac{5}{4}\right)$$

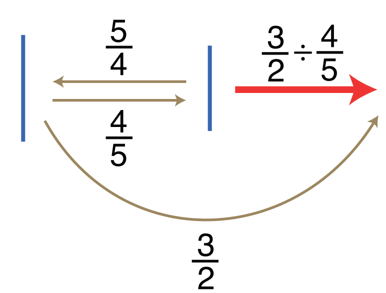


$$= \left(\left(\frac{3}{2} \div \frac{4}{5}\right) \times \frac{4}{5}\right) \times \frac{5}{4}$$
$$= \frac{3}{2} \times \frac{5}{4}$$

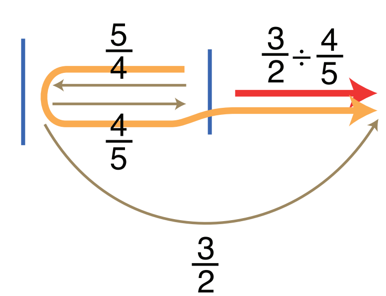


右図からは：

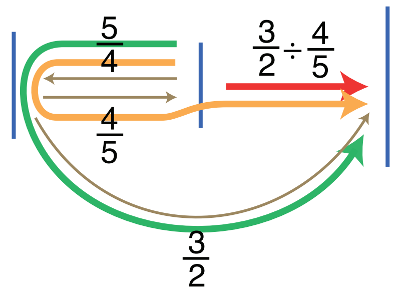
$$\frac{3}{2} \div \frac{4}{5}$$



$$= \left(\frac{5}{4} \times \frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{3}{2} \div \frac{4}{5}\right)$$



$$= \frac{5}{4}\times\left(\frac{4}{5}\times\left(\frac{3}{2}\div\frac{4}{5}\right)\right)$$
$$= \frac{5}{4}\times\frac{3}{2}$$



そしてこれより，つぎが分数の求商公式になります：

$$\frac{n}{m}\div\frac{q}{p} = \frac{n}{m}\times\frac{p}{q}$$

11.3　割り算が立式される問題の構造（「6÷ 3」を例に）

11.3.1「6÷ 3」の立式に至る問題の最終還元形

「6÷ 3」の意味は，つぎのようになります：

$$3 \times \square = \square \times 3 = 6$$

「6 ÷ 3」

また，「3× □」「□ × 3」の意味は，つぎのようになります：

$$\underbrace{\text{量}_a \xrightarrow{3} \text{量}_b \xrightarrow{\square} \text{量}_c}_{3 \times \square} \qquad \underbrace{\text{量}_a \xrightarrow{\square} \text{量}_b \xrightarrow{3} \text{量}_c}_{\square \times 3}$$

そこで，つぎが「6÷ 3」の立式に至る問題の最終還元形です：

$$\underbrace{\text{量}_a \xrightarrow{3} \text{量}_b \xrightarrow{\square} \text{量}_c}_{6} \qquad \underbrace{\text{量}_a \xrightarrow{\square} \text{量}_b \xrightarrow{3} \text{量}_c}_{6}$$

11.3.2 「6ｍ のひもを３本に等分すると，１本何ｍ？」

数式への還元のステップが，つぎのようになります：

問題から<倍>の構造を抽出	何mの３倍が 6mか？
問題を図式化	$\text{何m} \xrightarrow{3} 6\text{m}$
「○m」を分析	$\underbrace{\text{m} \xrightarrow{\text{何}} \text{何m} \xrightarrow{3} 6\text{m}}_{6}$
「×」の文法 $\underbrace{\text{量}_a \xrightarrow{\text{数}_1} \text{量}_b \xrightarrow{\text{数}_2} \text{量}_c}_{\text{数}_1 \times \text{数}_2}$	$\underbrace{\text{m} \xrightarrow{\text{何}} \text{何m} \xrightarrow{3} 6\text{m}}_{\text{何} \times 3 = 6}$
「÷」の文法 m × ○ ＝ ○ × m ＝ n 「n ÷ m」	何＝ 6 ÷ 3

11.3.3 「6 m のひもを何本に等分すると，１本３m？」

数式への還元のステップが，つぎのようになります：

問題から<倍>の構造を抽出	３mの何倍が 6mか？
問題を図式化	$3m \xrightarrow{何} 6m$
「○m」を分析	$\begin{tikzcd} m \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 3m \arrow[r, "何"] & 6m \end{tikzcd}$
「×」の文法 $\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1 \times 数_2"'] & 量_b \arrow[r, "数_2"] & 量_c \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} m \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "3 \times 何 = 6"'] & 3m \arrow[r, "何"] & 6m \end{tikzcd}$
「÷」の文法 m × ○ ＝ ○ × m ＝ n 「n ÷ m」	何＝ 6 ÷ 3

第12 講　比例関係

12.1　比例関係

12.1.1「比例関係」の定義

「比例関係」は，算数科では，

> 「*一方が２倍，３倍，‥‥ になるとき，*
> *もう一方も２倍，３倍，‥‥ になる*」

の言い回しで導入されます。

例えば，「(一定の) 速さ」は，「時間」と「距離」の間の比例関係と解釈されます：

> 「*経過時間が２倍，３倍，‥‥ になれば*
> *移動距離も２倍，３倍，‥‥*」

ここで，上の定義（ことばによる定義）の言い換えになる二つの形を，紹介します。――図による定義と式による定義です。

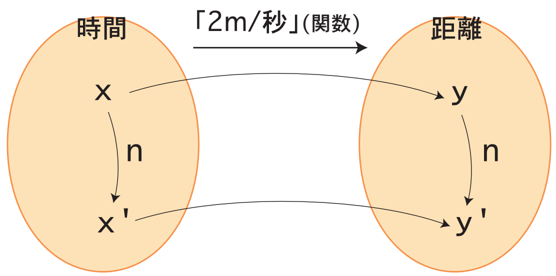
わかりやすいように，一般的な形で定義を示すのではなく，速さ「２m / 秒」を使うことにします。

速さ「２m / 秒」には，「*時間が２倍，３倍，‥‥ になれば距離も２倍，３倍，‥‥*」が含まれています。――実際，「5 秒のときは 10 m」と答えるとき，この条件を使っていることになります：

$$\begin{array}{ccc} \text{秒} & \longrightarrow & 2\text{m} \\ 5\downarrow & & \downarrow 5 \\ 5\text{秒} & \longrightarrow & 10\text{m} \end{array}$$

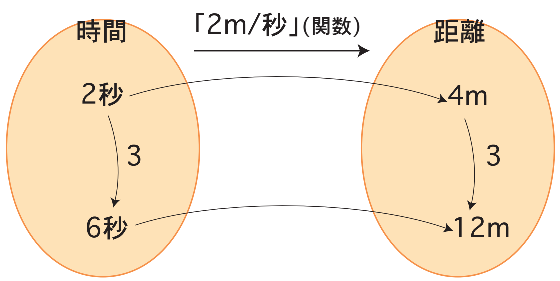
ここで，「集合」の考え (フィクション) を受け入れてください。——時間の集合 (すべての時間を要素とする集合) と距離の集合 (すべての距離を要素とする集合) 。

このとき，*「2m/秒」における「時間が2倍，3倍，‥‥ になれば距離も2倍，3倍，‥‥」*は，つぎのように言い換えられます：

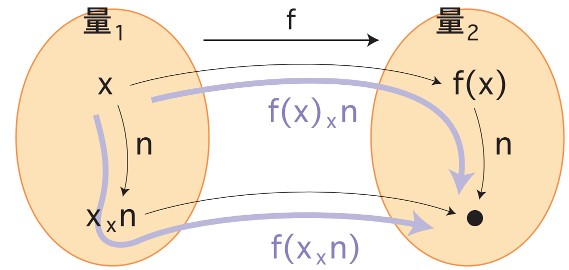


(n = 1, 2, 3, ‥‥)

例えば，つぎのような具合です：



つぎに, 関数「2m/ 秒」を f で表して, 上の図を式に置き換えてみましょう。つぎにようになります：



$$f(x \times n) = f(x)\ \mathrm{x}\ n$$

(ただし，× は倍作用の記号)

最後の図は，敢えて一般的な形に書きました。

以上，比例関係の定義の３つの形態 (ことば，図，式) を示しました。——見かけは違っても，定義していることは同じです。

12.1.2 分数値の場合

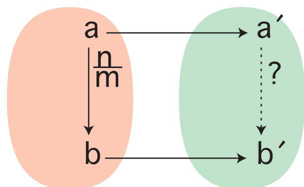
「比例関係」を,

「一方が 2 倍 , 3 倍 , ･･･ になるとき,

もう一方も 2 倍 , 3 倍 , ･･･ になる」

で定義しました。

では，自然数倍ではなく分数 n / m 倍の場合はどうなるのでしょう。

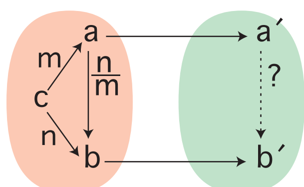


実は，定義より，つぎが導かれます：

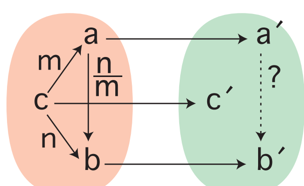
「一方が n / m 倍になるとき，もう一方も n / m になる」

以下，このことを示します。

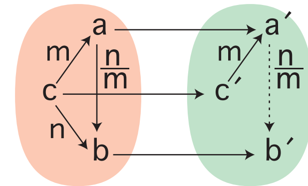
先ず，「n / m」の意味から，つぎの関係を満たす量 c がとれます：



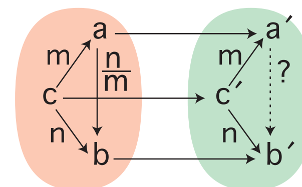
c の対応先を c ' とします：



「比例関係」の定義より，m倍にはm倍が対応します：

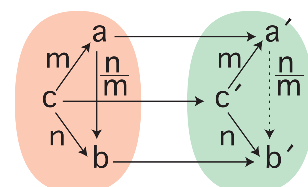


同様に，n 倍には n 倍が対応します：



このとき，c' が a' と b' をm：n に共約している図が得られています！

よって，分数倍の定義より，a' と b' の比は n/m：

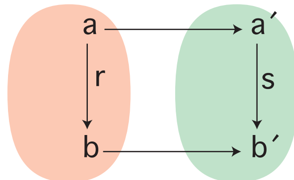


これで，n / m 倍には n / m 倍が対応することが示されました。

註：

比例関係で分数倍には同じ分数倍が対応することがわかりました。では，このことからさらに，実数倍には同じ実数倍が対応するでしょうか？答えは Yes ですが，証明は専門的内容になります。以下，その概略です。

つぎのようであるとします：



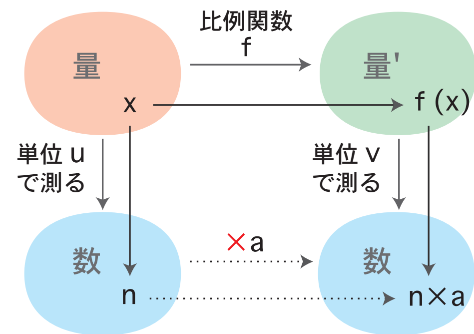
そして，r, s に収束する有理数列 $\{r_n\}$, $\{s_n\}$ をそれぞれ一つとります。

「量の系は加法を伴う数と同型」 ですので，$\{a \times r_n\}$ は $a \times r = b$ に収束します。さらに，「分数倍には分数倍が対応する」を使って，$\{a' \times r_n\}$ が b' に収束することが導かれます。

　一方, $\{a' \times s_n\}$ も b' に収束します。そして $\{a' \times r_n\}$ と $\{a' \times s_n\}$ の極限が同じということからは，$\{r_n\}$, $\{s_n\}$ の極限が同じであることが導かれます。すなわち，$r = s$ です。

12.1.3 比例定数

二量の間の比例関係 (関数) f からは，つぎのように「測定値の対応」として，数の対応が導かれます。そして，この数の対応は「一定数倍」になります。——実際，f(**u**) を **v** で測った数値 a が，その定数になります。



特に，定数 a は，**u** と **v** に依存します (単位 **u**, **v** を変えると， a の値も変わります)。

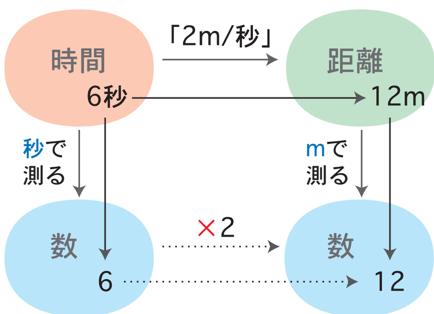
a は「**u** と **v** に関する f の表現数」と呼ぶべきものですが，「比例定数」がこれの伝統的な言い回しです。

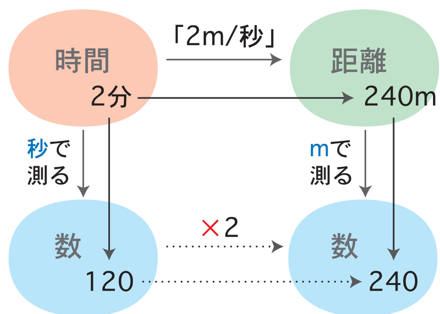
どうして「一定数倍」になるのか，確かめるとしましょう。
量に対する数の倍作用を $\times$ で表すことにします。「f(**u**) を **v** で測った値が a」とは，$f(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \times a$ ということです。また，**x** を **u** で測った値が n であるとは，$\mathbf{x} = \mathbf{u} \times n$ ということです。 このとき，f(**x**) を **v** で測った値が $n \times a$ であること，すなわち $f(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \times (n \times a)$ が，つぎのように導かれます：

$$
\begin{aligned}
& f(\mathbf{x}) \\
&= f(\mathbf{u} \times n) && (\mathbf{x} = \mathbf{u} \times n) \\
&= f(\mathbf{u}) \times n && (f\ \text{が比例関数であることの条件}) \\
&= (\mathbf{v} \times a) \times n && (\text{条件}: f(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \times a) \\
&= \mathbf{v} \times (a \times n) && (\text{数の積の定義}) \\
&= \mathbf{v} \times (n \times a)
\end{aligned}
$$

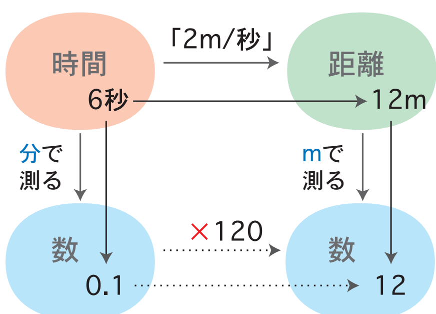
例： 比例関数「2m/ 秒」では,

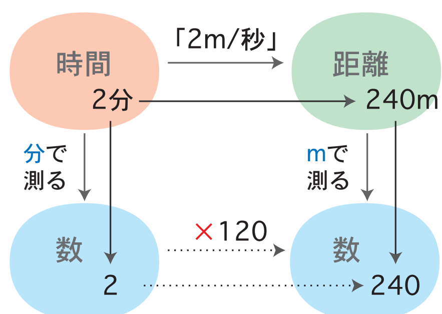
(1) 秒とmに対する比例定数は 2：





(2) 分とmに対する比例定数は 120：





12.2 比例関係の問題の解法

12.2.0 要旨

比例関係の問題をきちんと解くことは，簡単ではありません。論理的な力を要します。

したがって，特に小学算数では，その場の方便や「公式」の適用といった形で，この主題をなんとかやり過ごしているというのが，現状です。例えば，「速さ」の問題は比例関係の問題になりますが，「距離 ÷ 時間＝速さ」「距離 ÷ 速さ＝時間」「速さ × 時間＝距離」の適用という以外に問題解決を説明できないというのが，一般的のようです。

ここでは, 比例関係の問題を論理的にきちんととらえて解くことを, やってみることにします。

比例関係の問題の解決は，つぎのように進みます：

1. ２つの量の系の間の比例関係の問題を，一方の量の系の中の倍関係の問題に還元する；
2. この倍関係の問題を，数の計算問題に還元する。

12.2.1 問題の３タイプ

比例関係の問題は，速さの関係

「毎秒 ○ m では ○ 秒たつと○ m」

を例にすると，３つの値のうち２つを示して残りを問うという形になります。よって，つぎの３タイプになります：

A.「毎秒 3/2 m では，4/5 秒たつと何m？」
B.「毎秒 3/2 m では，何秒たつと 4/5 m？」
C.「毎秒何 m なら，3/2 秒たつと 4/5 m？」

12.2.2　例：速さの問題解決

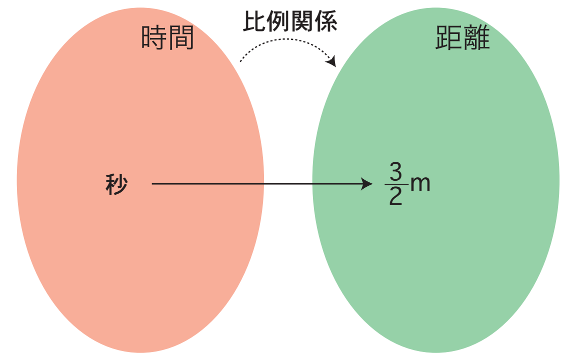
速さ (速度) の計算問題は，＜「時間と距離の間の比例関係」としての速さ＞の計算問題です。
したがって，速さの計算問題を解くことのうちには，速さを「時間と距離の間の比例関係」としてきちんと理解できていることが含まれます。

ここでは，具体的につぎの問題を解いていきます：

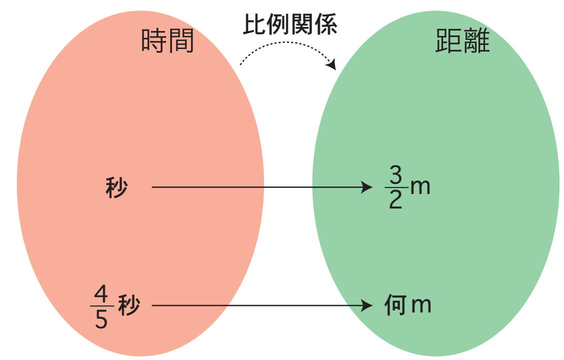
A.「毎秒 3/2 m では，4/5 秒たつと何m？」
　(「何」に式「3/2 × 4/5」を立てる理由)
B.「毎秒 3/2 m では，何秒たつと 4/5 m？」
　(「何」に式「4/5 ÷ 3/2」を立てる理由)
C.「毎秒何 m なら，3/2 秒たつと 4/5 m？」
　(「何」に式「4/5 ÷ 3/2」を立てる理由)

A.「毎秒 3/2 m では，4/5 秒たつと何m？」
　(「何」に式「3/2 × 4/5」を立てる理由)

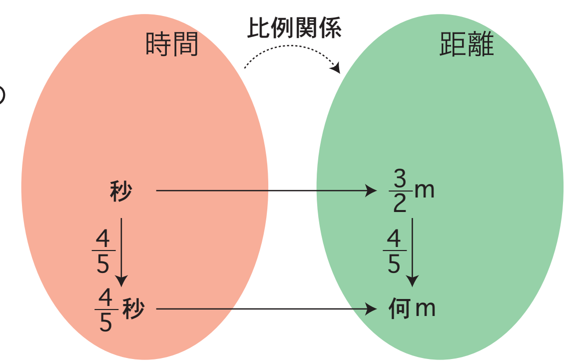
(1)「毎秒 3/2 m」の含意：



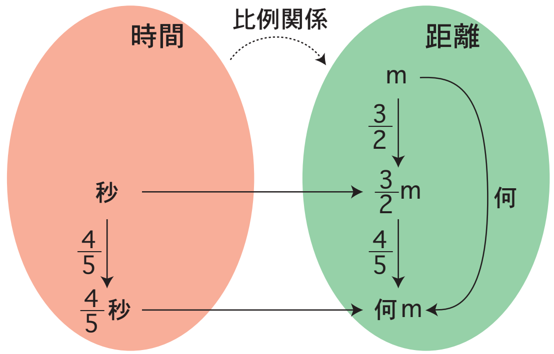
(2) この図に，「4/5 秒たつと何m？」を書き加える：



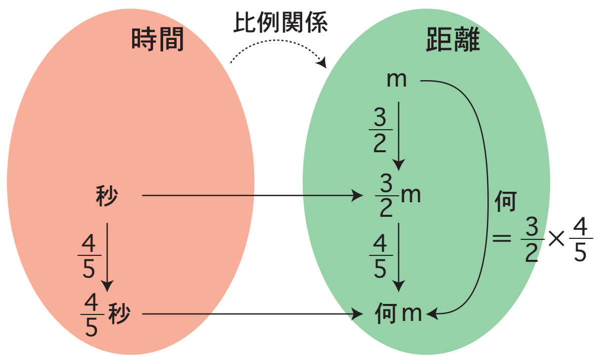
(3) 4/5 秒は秒の 4/5 倍。
比例関係の条件から，この 4/5 倍が他方に移る。



(4) 3/2m と「何」m は，それぞれ m の 3/2 倍と「何」倍：

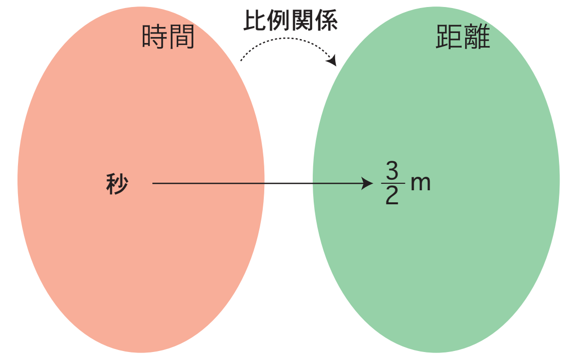


(5) 3/2 倍と 4/5 倍の合成は，(3/2×4/5) 倍。そして，これが「何」倍に等しい。
したがって，求める「何」は，3/2×4/5。

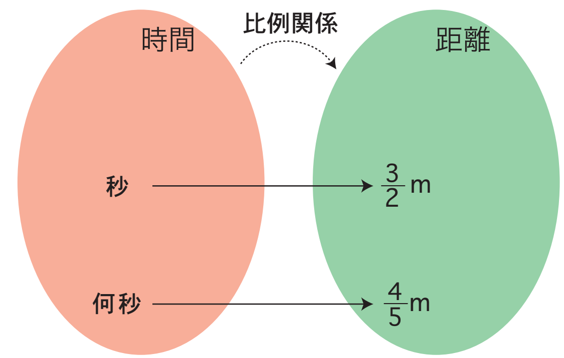


B.「毎秒 3/2 m では，何秒たつと 4/5 m？」
（「何」に式「4/5 ÷ 3/2」を立てる理由）

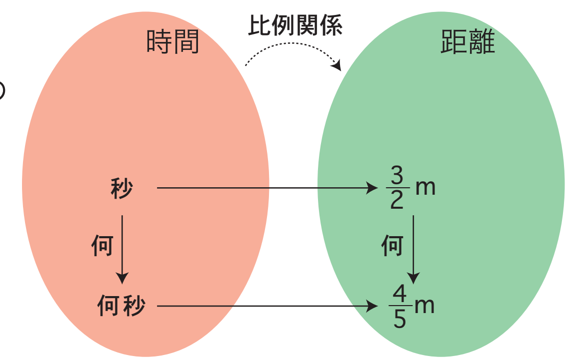
(1)「毎秒 3/2 m」の含意：



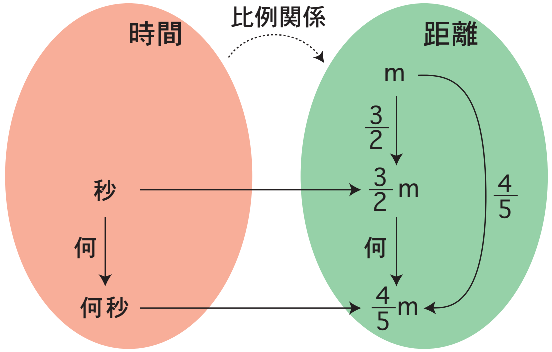
(2) この図に，「何秒たつと 4/5 m？」を書き加える。



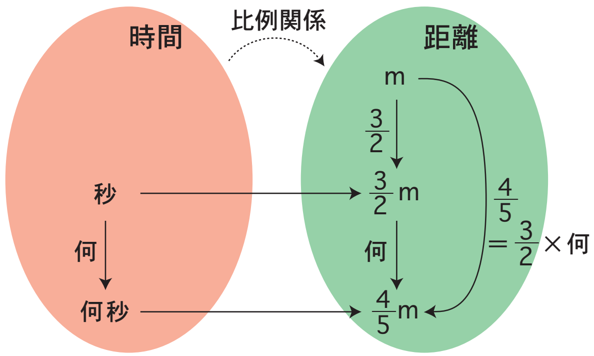
(3)「何」秒は秒の「何」倍。
比例関係の条件から，この「何」倍が他方に移る。



(4) 3/2m と 4/5m は，それぞれ m の 3/2 倍と 4/5 倍：

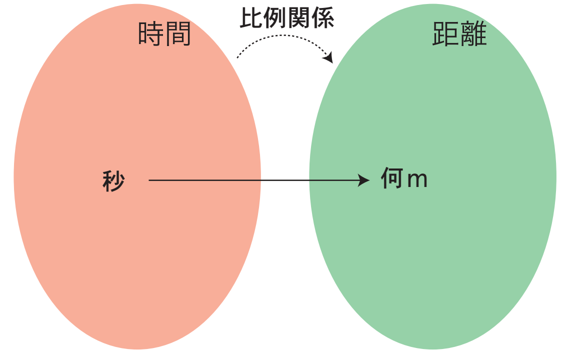


(5) 3/2 倍と「何」倍の合成は，(3/2× 何) 倍。そして，これが 4/5 倍に等しい。
したがって，求める「何」は，4/5÷3/2。

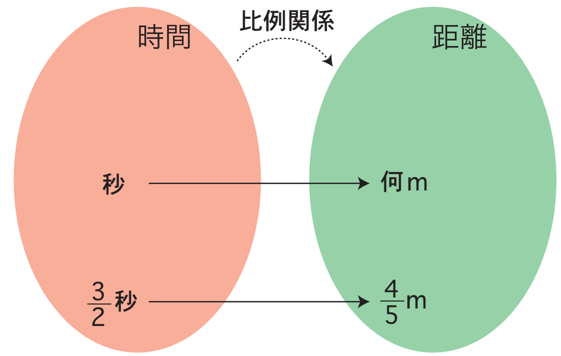


C.「毎秒何 m なら，3/2 秒たつと 4/5 m？」
(「何」に式「4/5 ÷ 3/2」を立てる理由)

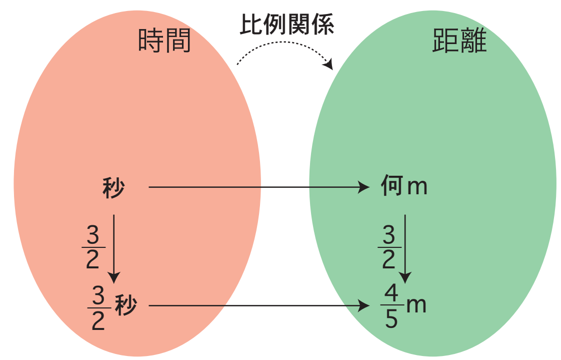
(1)「毎秒 何 m」の含意：



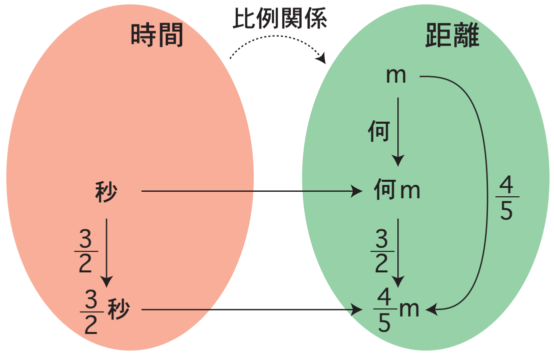
(2) この図に，「何秒たつと 4/5 m？」を書き加える。



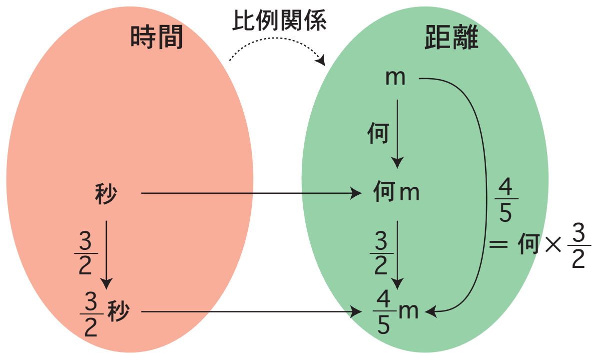
(3) 3/2 秒は秒の 3/2 倍。
比例関係の条件から，この 3/2 倍が他方に移る。



(4)「何」m と 4/5m は，それぞれ m の「何」倍と 4/5 倍：



(5)「何」倍と 3/2 倍の合成は，(何 ×3/2) 倍。そして，これが 4/5 倍に等しい。
したがって，求める「何」は，4/5÷3/2。



第13講　量計算

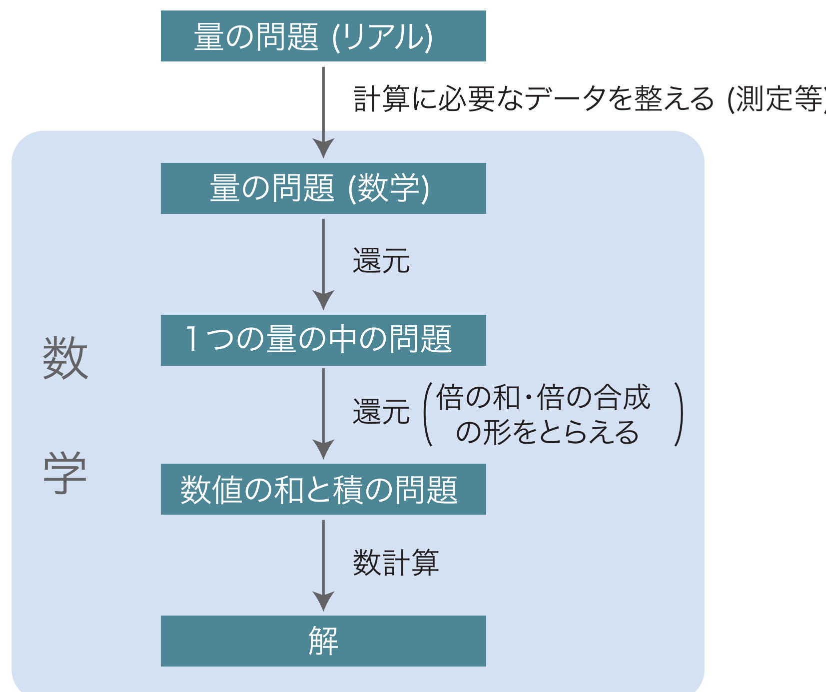
13.1「量計算」の意味

13.1.1　問題の還元：数値の和 / 積へ

量計算は，量測定を行うなどして計算に必要な情報が揃ったところから始まるプロセスです。

一つの量（長さ，重さ等）の中の計算問題は，＜倍の和＞ないし＜倍の倍＞の形をとらえて，数値の和・積の問題に還元します。そして，これを解きます。

複数の量に関する計算問題は，一つの量（長さ，重さ等）の中の問題に還元して解きます。——比例関係の問題解決は, この場合にあたります。



13.1.2　量計算の公式の意味

速さの問題を解く公式として,「距離 ÷ 時間＝速さ」「距離 ÷ 速さ＝時間」「速さ × 時間＝距離」が使われています。この公式の意味は何でしょう？
実際, ×・÷ は数の演算の記号であって, 量である時間・距離・速さに対して使われるものではありません。

長方形の面積を求める公式として,「タテ (の長さ) × ヨコ (の長さ) ＝面積」というのもあります。これも, 記号 × の文法からすると, おかしい表現です。

これらの公式で実際に述べられていることは, ある単位に対する量の数値の関係です。特に, 単位の取り方に依存しています。

時間・距離・速さの場合であれば, 距離の単位に「m」, 時間の単位に「分」をとったときは, 速さの単位に「m/ 分」をとることになります (「単位をそろえる」)。 そうすると,

「距離の数値 ÷ 時間の数値 ＝ 速さの数値」
「距離の数値 ÷ 速さの数値 ＝ 時間の数値」
「速さの数値 × 時間の数値 ＝ 距離の数値」

が成り立ちます。
このことを,「距離 ÷ 時間＝速さ」「距離 ÷ 速さ＝時間」「速さ × 時間＝距離」と言っているわけです。

また, 長方形の面積の場合であれば, 長さの単位に「cm」をとったときは, 面積の単位に「cm^2」をとることになります (「単位をそろえる」)。 そうすると,

「タテの数値 × ヨコの数値 ＝ 面積の数値」

が成り立ちます。
このことを,「タテ × ヨコ ＝面積」と言っているわけです。

公式の適用はよくできていても, 公式の意味・理由は意識されていません。
実際, 学校数学も, 公式の意味･理由の理解に必要な数学 (「量」の数学) を教えるふうにはなっていません。

13.2　＜量の倍＞の計算 (→ 倍の合成)

13.2.1　＜量の倍＞の問題の３タイプ

量の計算は，数の和・積の立式とこれの計算が要素になります。
ここでは，＜量の倍＞の計算を取り上げ，これの解法の論理を確認することにします。

例として，重さの倍関係「２ｇ (ぐらむ) の３倍は６ｇ」を考えます：

$$2\text{g} \xrightarrow{3} 6\text{g}$$

「３倍」「６ｇ」「２ｇ」のどれを未知にするかによって，つぎの３タイプの計算問題が導かれます：

「２ｇの何倍が６ｇか？」　$2\text{g} \xrightarrow{\text{何}} 6\text{g}$

「２ｇの３倍は何ｇか？」　$2\text{g} \xrightarrow{3} \text{何g}$

「何ｇの３倍が６ｇか？」　$\text{何g} \xrightarrow{3} 6\text{g}$

13.2.2　推論：積 / 商の数式への還元

「２ｇの３倍は６ｇ」から導かれる３タイプの問題：

「２ｇの何倍が６ｇか？」
「２ｇの３倍は何ｇか？」
「何ｇの３倍が６ｇか？」

に対する数学の解法は，つぎのようになります：

問題	「2ｇの何倍が6ｇか?」	「2ｇの3倍は何ｇか?」	「何ｇの3倍が6ｇか?」
問題を図式化	$2\mathrm{g} \xrightarrow{何} 6\mathrm{g}$	$2\mathrm{g} \xrightarrow{3} 何\mathrm{g}$	$何\mathrm{g} \xrightarrow{3} 6\mathrm{g}$
「○g」を分析	$\underbrace{\mathrm{g} \xrightarrow{2} 2\mathrm{g} \xrightarrow{何} 6\mathrm{g}}_{6}$	$\underbrace{\mathrm{g} \xrightarrow{2} 2\mathrm{g} \xrightarrow{3} 何\mathrm{g}}_{何}$	$\underbrace{\mathrm{g} \xrightarrow{何} 何\mathrm{g} \xrightarrow{3} 6\mathrm{g}}_{6}$
「×」の文法 $\underbrace{量_a \xrightarrow{数_1} 量_b \xrightarrow{数_2} 量_c}_{数_1 \times 数_2}$	$\underbrace{\mathrm{g} \xrightarrow{2} 2\mathrm{g} \xrightarrow{何} 6\mathrm{g}}_{6\,=\,2\,\times\,何}$	$\underbrace{\mathrm{g} \xrightarrow{2} 2\mathrm{g} \xrightarrow{3} 何\mathrm{g}}_{何\,=\,2\,\times\,3}$	$\underbrace{\mathrm{g} \xrightarrow{何} 何\mathrm{g} \xrightarrow{3} 6\mathrm{g}}_{6\,=\,何\,\times\,3}$
「÷」の文法 m × ○ ＝ ○ × m ＝ n 「n ÷ m」	何 ＝ 6 ÷ 2		何 ＝ 6 ÷ 3

13.2.3　＜倍の合成＞の形式を抽出しにくい文章題

1.「６人が２台の車に同じ数だけ分かれて乗るとき，１台の車に何人？」

問題から<倍>の構造を抽出	何人の２倍が６人か？
問題を図式化	$何人 \xrightarrow{2} 6人$
「○人」を分析	$\begin{tikzcd} 人 \arrow[r, "何"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 何人 \arrow[r, "2"] & 6人 \end{tikzcd}$
「×」の文法 $\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1 \times 数_2"'] & 量_b \arrow[r, "数_2"] & 量_c \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} 人 \arrow[r, "何"] \arrow[rr, bend right, "6 = 何 \times 2"'] & 何人 \arrow[r, "2"] & 6人 \end{tikzcd}$
「÷」の文法 m × ○ ＝ ○ × m ＝ n 「n ÷ m」	何 ＝ ６ ÷ ２

2.「６人が２人ずつ車に乗るとき，車は何台要る？」

問題から<倍>の構造を抽出	２人の何倍が６人か？
問題を図式化	$2人 \xrightarrow{何} 6人$
「○人」を分析	$\begin{tikzcd} 人 \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 2人 \arrow[r, "何"] & 6人 \end{tikzcd}$
「×」の文法 $\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1 \times 数_2"'] & 量_b \arrow[r, "数_2"] & 量_c \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} 人 \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "6 = 2 \times 何"'] & 2人 \arrow[r, "何"] & 6人 \end{tikzcd}$
「÷」の文法 m × ○ ＝ ○ × m ＝ n 「n ÷ m」	何 ＝ ６ ÷ ２

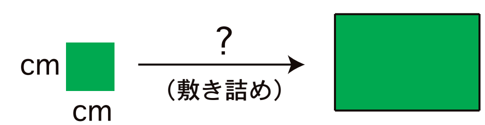
13.3　長方形の面積計算，直方体の体積計算
——比例関係の問題解決として

13.3.1 長方形の面積計算

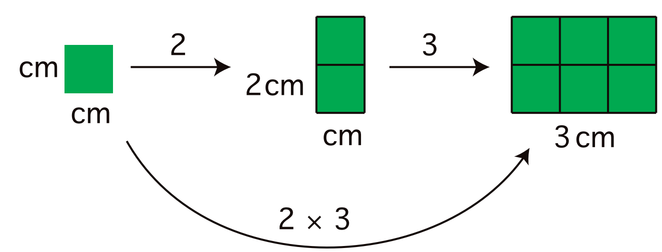
長方形の面積は，隣り合う２辺の長さの数値に対する計算で求めることができます。

最初に，＜長さの数値が自然数の場合＞をやってみましょう。
つぎの長方形の面積 (単位 cm2) を考えます：

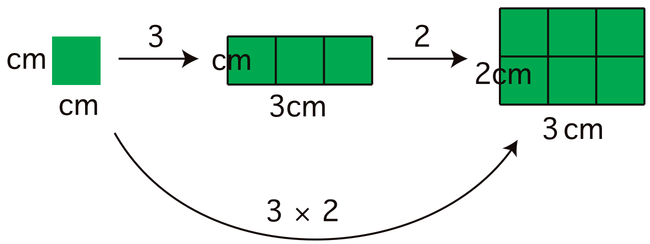
面積を求めるとは，「単位長さ四方の正方形がいくつ入るか」を求めるということです。
そして，単位 cm^2 で面積を求めるとは，つぎの敷き詰めを考えることです：



このとき，つぎの倍関係をとらえます：



あるいは



cm^2 を単位とする数値「?」の立式は,

最初の図のように「2倍して3倍」のように構造化したときは ,
「2× 3」
後の図のように「3倍して2倍」のように構造化したときは ,
「3× 2」

に，それぞれなります。 (確認 : 積の意味 (記号「×」の文法))
すなわち,

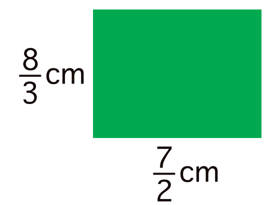
「cm^2 を単位とした面積の数値が,
隣り合う2辺の長さの cm を単位とした数値の積で求められる。」

ということです。
そして，このことを短く言い表したのが「タテ × ヨコ」です。

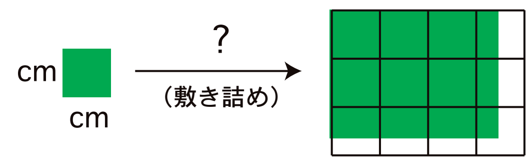
<u>「タテ × ヨコ」は，長さ × 長さ ではありません</u>。
「×」は，数に対して定義されます。
「重さ × 重さ」を考えよと言われたら，「何それ ?!」のリアクションになるはずです。「長さ × 長さ」も，このようにリアクションするべきものです。

＜長さの数値が分数値の場合＞にも，いま述べた意味の「タテ × ヨコ」を既に使っているでしょう。
どうしてこの計算になるのかも，確認しておきます。

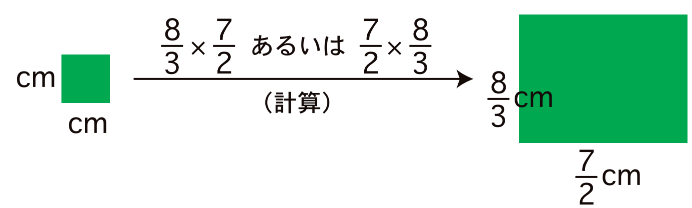
つぎの長方形の面積 (単位 cm^2) を考えましょう :



cm 四方の正方形で敷き詰めることはできません :



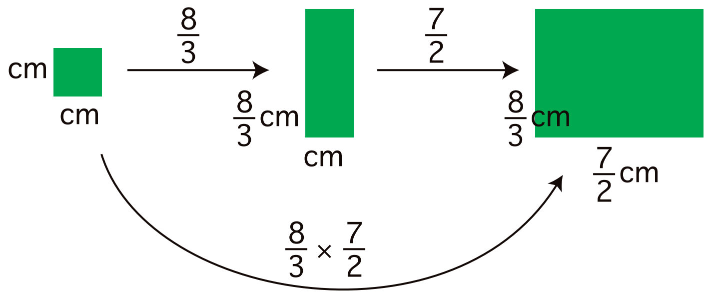
しかし，この長方形の面積は，「cm 四方の正方形の面積の (8/3 × 7/2) 倍」あるいは「cm 四方の正方形の面積の (7/2 × 8/3) 倍」と求められます :



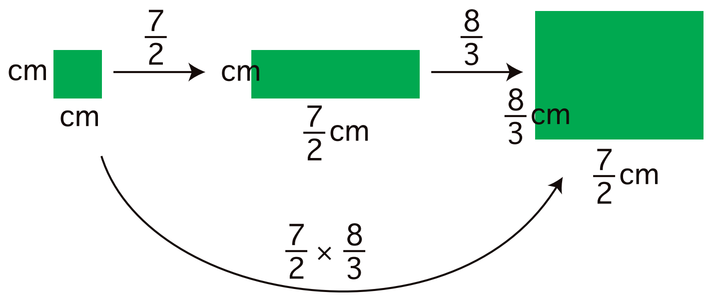
どうして？
ここでは，つぎのことを使います :

「*隣り合う２辺の一方の辺の長さを固定したとき，*
他方の辺の長さと面積は比例関係にある。」(註)

実際，これより，つぎの関係が成立します：

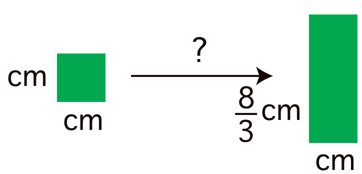


あるいは

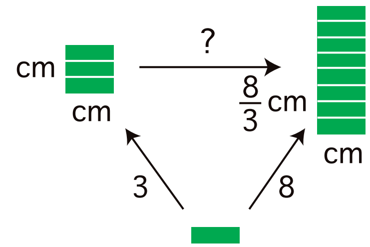


(確認：積の意味 (記号「×」の文法))

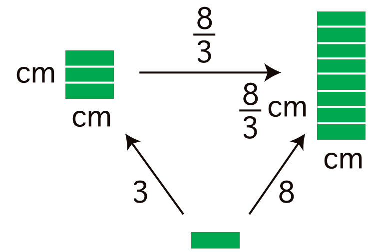
註：つぎの倍が 8/3 倍になることを説明します：



左右の長方形のタテの長さを 3 と 8 に共約する長さがとれます。この長さをタテの長さとし，ヨコの長さが同じである長方形をとります。これによって，左右の長方形が 3 と 8 に共約されます：



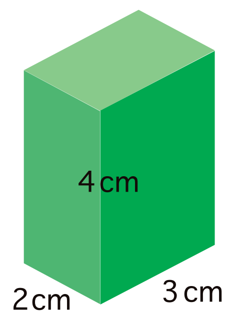
よって，面積の 8/3 倍が結論されます：



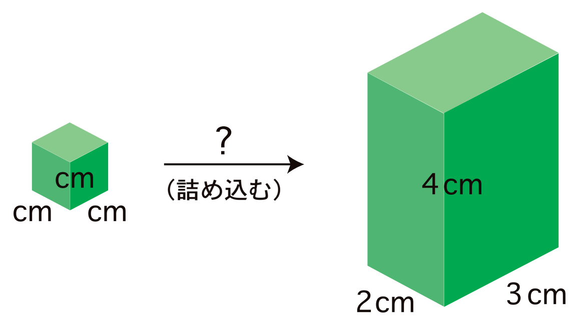
13.3.2 直方体の体積計算

直方体の体積は，隣り合う３辺の長さの数値に対する計算で求めることができます。
考え方は，長方形の面積のときと同じです。

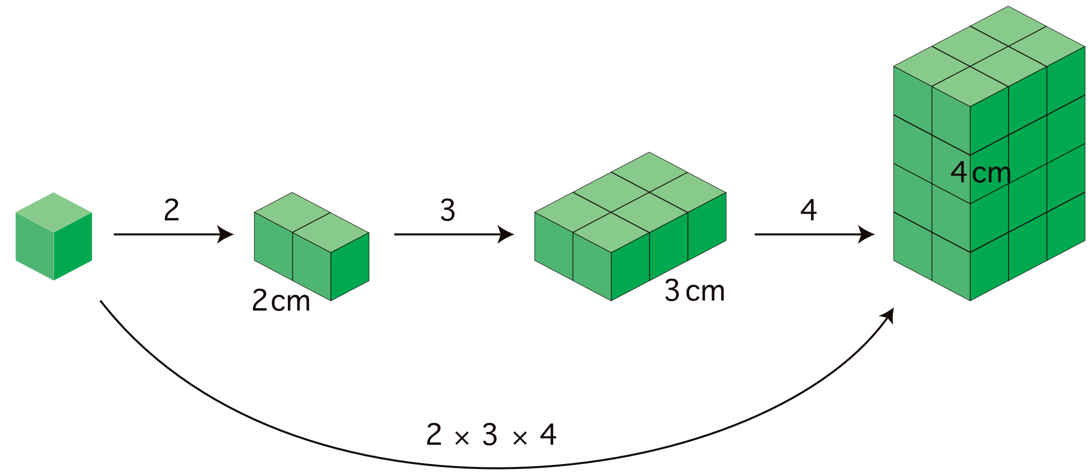
<長さの数値が自然数の場合>をやってみましょう。
つぎの直方体の体積 (単位 cm^3) を考えます：



体積を求めるとは，「単位長さ立方の立方体がいくつ入るか」を求めるということです。
そして，単位 cm^3 で体積を求めるとは，つぎの詰め込みを考えることです：



このとき，つぎの倍関係をとらえます：



(確認：積の意味 (記号「×」の文法))

よって，cm^3 を単位とする数値は，2× 3× 4 になります。
すなわち，

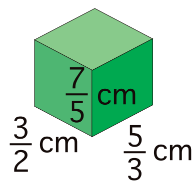
「*cm*^{3} *を単位とした体積の数値が，*
cm を単位としたタテ・ヨコ・タカサの数値の積で求められる。」

ということです。
そして，このことを短く言い表したのが「タテ × ヨコ × タカサ」です。

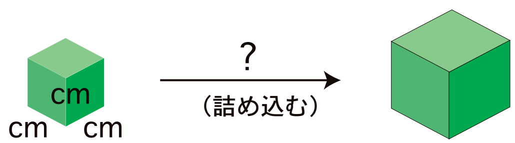
<u>「タテ × ヨコ × タカサ」は，長さ × 長さ × 長さ ではありません。</u>
「×」は，数に対して定義されます。
「重さ × 重さ × 重さ」を考えよと言われたら，「何それ ?!」のリアクションになるはずです。「長さ × 長さ × 長さ」も，このようにリアクションするべきものです。

<長さの数値が分数値の場合>にも，いま述べた意味の「タテ × ヨコ × タカサ」を既に使っているでしょう。
どうしてこの計算になるのかも，確認しておきます。

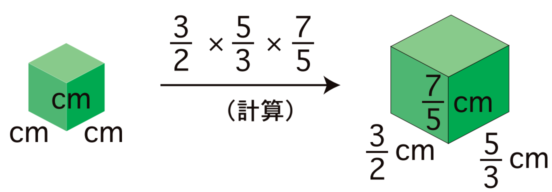
つぎの直方体の体積 (単位 cm^3) を考えましょう：



cm 立方の立方体をピッタリ詰め込むことはできません：



しかし，この直方体の体積は，「cm 立方の立方体の体積の (3/2 × 5/3 × 7/5) 倍」と求められます：

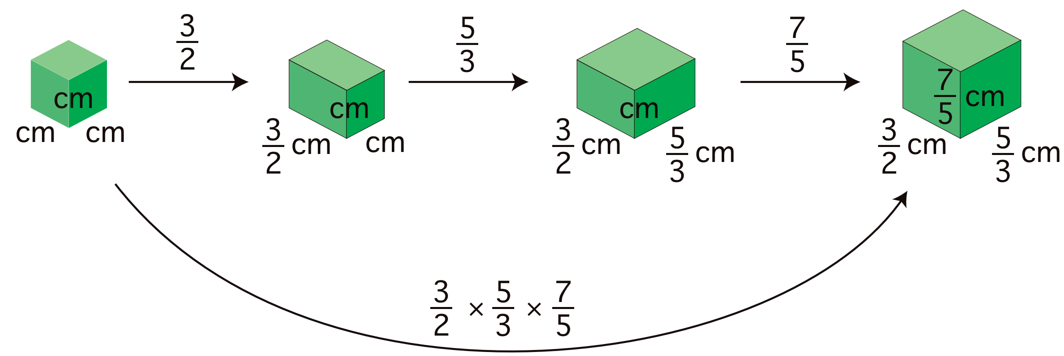


どうして？

ここでは，つぎのことを使います：

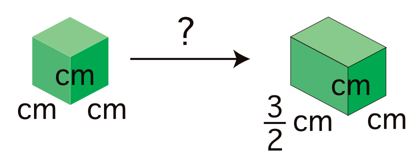
「ヨコとタカサの長さを固定したとき，
　タテの長さと体積は比例関係にある」
「タテとタカサの長さを固定したとき，
　ヨコの長さと体積は比例関係にある」
「タテとヨコの長さを固定したとき，
　タカサの長さと体積は比例関係にある」

実際，これより，つぎの関係が成立します：

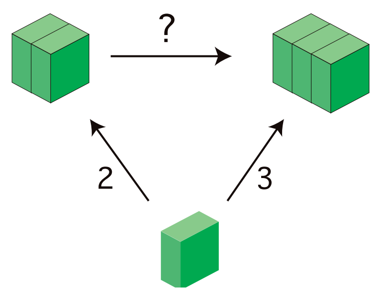


註：「*ヨコとタカサの長さを固定したとき，タテの長さと体積は比例関係にある*」は，つぎのように説明されます：

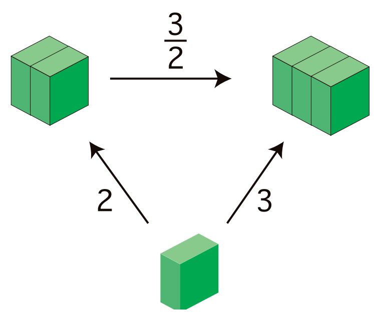
つぎの倍が 3/2 倍になること (上図) を説明します：



左右の直方体のタテの長さを 2 と 3 に共約する長さがとれます。この長さをタテの長さとし，ヨコとタカサの長さが同じである直方体をとります。これによって，左右の直方体が 2 と 3 に共約されます：



よって，体積の 3/2 倍が結論されます：



13.4　単位の換算

13.4.1　単位換算の推論プロセス

1.「２ｍは何 cm ？」で，「何＝ 100 × 2」が導かれる論理

問題から<倍>の構造を抽出	cmの何倍が２ｍか？
問題を図式化	$\mathrm{cm} \xrightarrow{何} 2\,\mathrm{m}$
「2ｍ」と「cm」を分析	$\begin{tikzcd} & \mathrm{m} \arrow[dr, "2"] & \\ \mathrm{cm} \arrow[ur, "100"] \arrow[rr, "何"] & & 2\,\mathrm{m} \end{tikzcd}$
「×」の文法 $\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1 \times 数_2"'] & 量_b \arrow[r, "数_2"] & 量_c \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} & \mathrm{m} \arrow[dr, "2"] & \\ \mathrm{cm} \arrow[ur, "100"] \arrow[rr, "何＝100 \times 2"'] & & 2\,\mathrm{m} \end{tikzcd}$ $\begin{tikzcd} \mathrm{cm} \arrow[r, "100"] \arrow[rr, bend right, "何＝100 \times 2"'] & \mathrm{m} \arrow[r, "2"] & 2\,\mathrm{m} \end{tikzcd}$

2.「２ｃｍは何ｍ？」で，「何＝２÷ 100」が導かれる論理

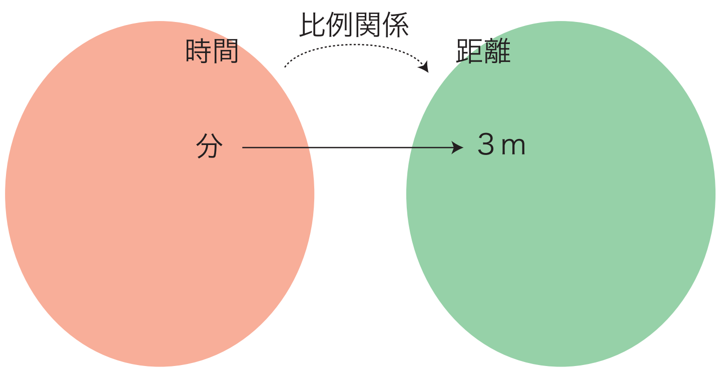
問題から<倍>の構造を抽出	ｍの何倍が２cm か？
問題を図式化	$\mathrm{m} \xrightarrow{何} 2\,\mathrm{cm}$
「ｍ」と「2cm」を分析	$\begin{tikzcd} \mathrm{cm} \arrow[r, "100"] \arrow[rr, bend right, "2"'] & \mathrm{m} \arrow[r, "何"] & 2\,\mathrm{cm} \end{tikzcd}$
「×」の文法 $\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1 \times 数_2"'] & 量_b \arrow[r, "数_2"] & 量_c \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} \mathrm{cm} \arrow[r, "100"] \arrow[rr, bend right, "何 \times 100 ＝ 2"'] & \mathrm{m} \arrow[r, "何"] & 2\,\mathrm{cm} \end{tikzcd}$
「÷」の文法 $m \times \bigcirc = \bigcirc \times m = n$ 「n ÷ m」	何＝ 2 ÷100

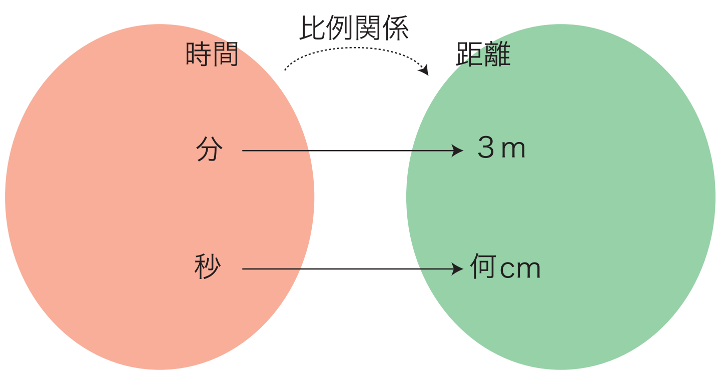
13.4.2 比例関係と単位換算が合わさった問題

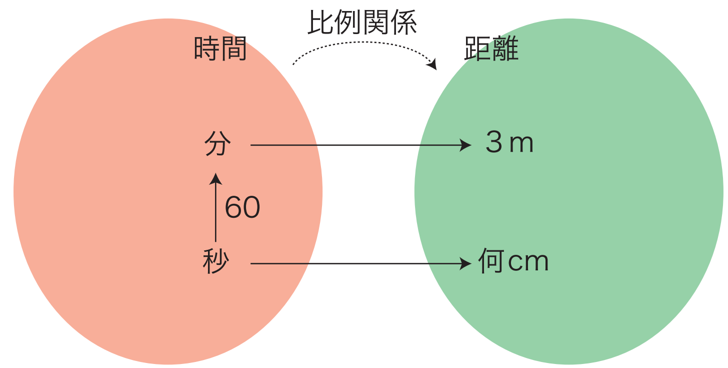
つぎは，比例関係と単位の換算を合わせた問題です：

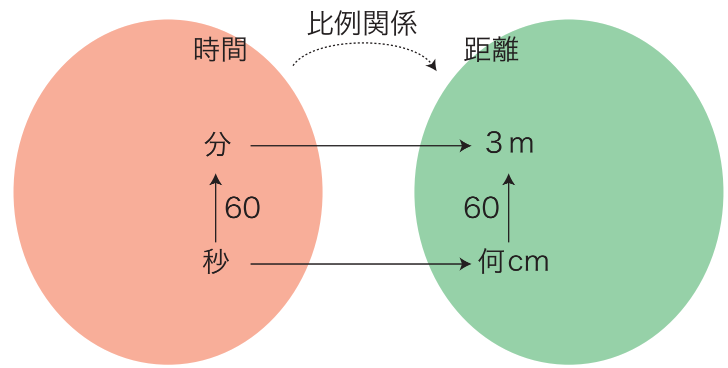
「「3 m / 分は，何 cm/ 秒？」

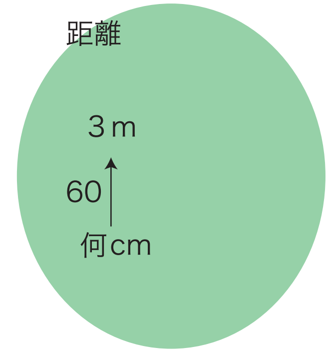
そして，つぎがこれの推論 (計算) です：

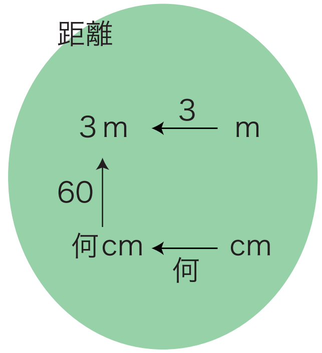


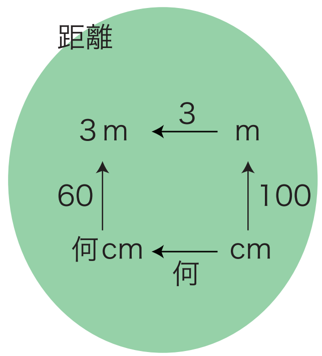












何×60 ＝ 100 × 3

何＝（100 × 3）÷60

上の問題は，＜比例関係＋単位換算＞の問題としては，まだ特殊な形になっています。

＜比例関係＋単位換算＞問題の一般形は，

「○m / ●秒では，□ km/ ■分」

の ○，●，□，■ のうちの３つに数値を与え，残り一つを問うものです。

そして，これはつぎの４通りになります：

２秒で３ｍの速さだったら，４分で何ｋｍ？

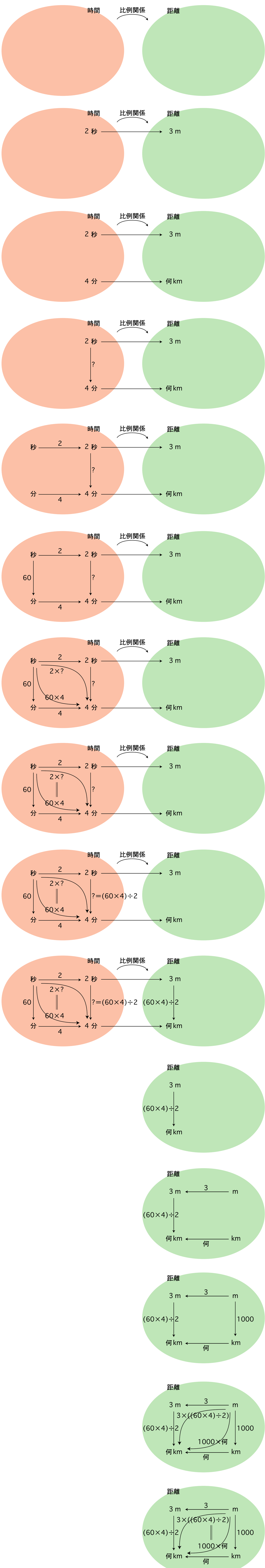
２秒で３ｍの速さだったら，何分で５ｋｍ？

２秒で何ｍの速さだったら，４分で５ｋｍ？

何秒で３ｍの速さだったら，４分で５ｋｍ？

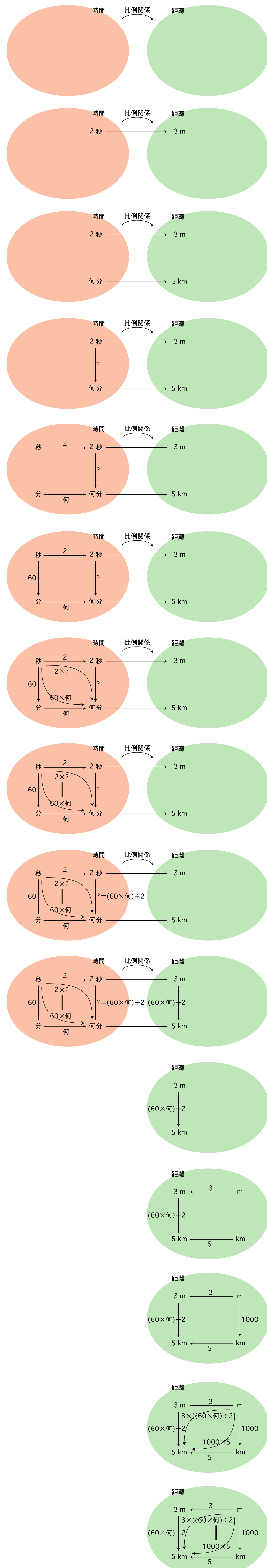
この解法を，つぎのページの図に示します。

2秒で3mの速さだったら，4分で何km？



何＝(3×((60×4)÷2))÷1000

2秒で3mの速さだったら，何分で5km？



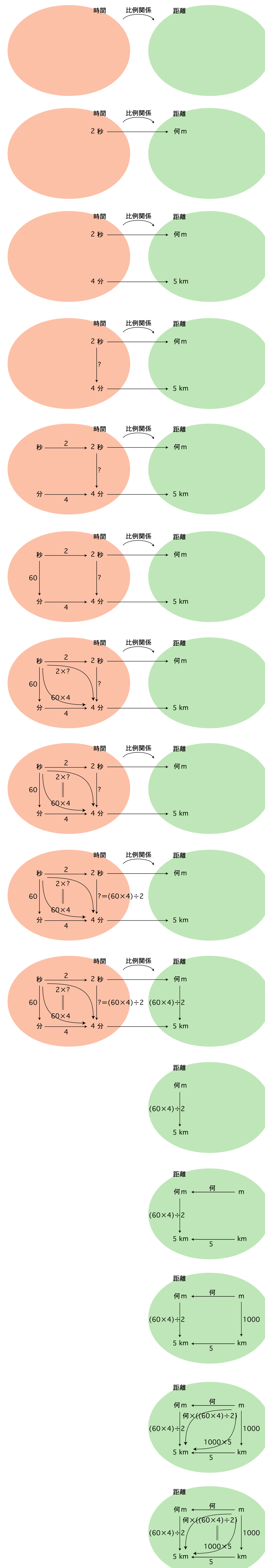
3×((60×何)÷2) = 1000×5

(60×何)÷2 = (1000×5)÷3

60×何 = ((1000×5)÷3)×2

何 = (((1000×5)÷3)×2)÷60

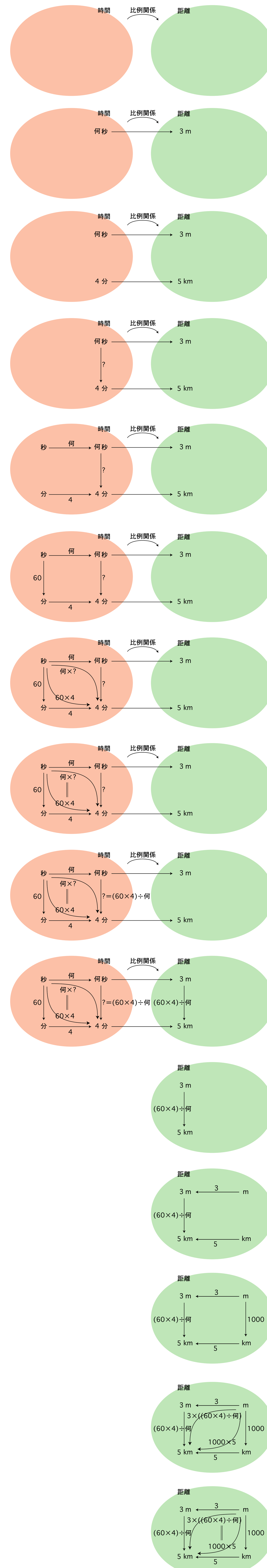
2秒で何mの速さだったら，4分で5km？



何×((60×4)÷2) = 1000×5

何 = (1000×5)÷((60×4)÷2)

何秒で3mの速さだったら，4分で5km？



3×((60×4)÷何) = 1000×5

(60×4)÷何 = (1000×5)÷3

60×4 = ((1000×5)÷3)×何

何 = (60×4)÷((1000×5)÷3)

13.5　割り算が立式される問題のいろいろ (「6÷ 3」の場合)

13.5.1 「6÷ 3」の立式に至る問題の最終還元形

「6÷ 3」の意味は，つぎのようになります：

$$3\times\square \;=\; \square\times 3 \;=\; 6$$

「6 ÷ 3」

また，「3× □」「□ × 3」の意味は，つぎのようになります：

$$\begin{tikzcd} \text{量}_a \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "3\times\square"'] & \text{量}_b \arrow[r, "\square"] & \text{量}_c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \text{量}_a \arrow[r, "\square"] \arrow[rr, bend right, "\square\times 3"'] & \text{量}_b \arrow[r, "3"] & \text{量}_c \end{tikzcd}$$

そこで，つぎが「6÷ 3」の立式に至る問題の最終還元形です：

$$\begin{tikzcd} \text{量}_a \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & \text{量}_b \arrow[r, "\square"] & \text{量}_c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \text{量}_a \arrow[r, "\square"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & \text{量}_b \arrow[r, "3"] & \text{量}_c \end{tikzcd}$$

13.5.2 「6個 の飴を３人に等分すると，１人何個？」

数式への還元のステップが，つぎのようになります：

<table>
<tr><td>問題から<倍>の構造を抽出</td><td>何個の３倍が６個か？</td></tr>
<tr><td>問題を図式化</td><td>$$\text{何個} \xrightarrow{3} \text{6個}$$</td></tr>
<tr><td>「◯個」を分析</td><td>$$\begin{tikzcd} \text{個} \arrow[r, "\text{何}"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & \text{何個} \arrow[r, "3"] & \text{6個} \end{tikzcd}$$</td></tr>
<tr><td>「×」の文法
$$\begin{tikzcd} \text{量}_a \arrow[r, "\text{数}_1"] \arrow[rr, bend right, "\text{数}_1\times\text{数}_2"'] & \text{量}_b \arrow[r, "\text{数}_2"] & \text{量}_c \end{tikzcd}$$</td><td>$$\begin{tikzcd} \text{個} \arrow[r, "\text{何}"] \arrow[rr, bend right, "\text{何}\times 3 = 6"'] & \text{何個} \arrow[r, "3"] & \text{6個} \end{tikzcd}$$</td></tr>
<tr><td>「÷」の文法
$$m\times\bigcirc = \bigcirc\times m = n$$
「n ÷ m」</td><td>何＝ 6 ÷ 3</td></tr>
</table>

13.5.3 「6個 の飴を何人に等分すると，1人3個？」

数式への還元のステップが，つぎのようになります：

問題から<倍>の構造を抽出	3個の何倍が6個か？
問題を図式化	$3個 \xrightarrow{何} 6個$
「○個」を分析	$\begin{tikzcd} 個 \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 3個 \arrow[r, "何"] & 6個 \end{tikzcd}$
「×」の文法 $\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1 \times 数_2"'] & 量_b \arrow[r, "数_2"] & 量_c \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} 個 \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "3 \times 何 = 6"'] & 3個 \arrow[r, "何"] & 6個 \end{tikzcd}$
「÷」の文法 $m \times \bigcirc = \bigcirc \times m = n$ 「n ÷ m」	何＝ 6 ÷ 3

13.5.4 「1ヤードは3フィート，6フィートは何ヤード？」

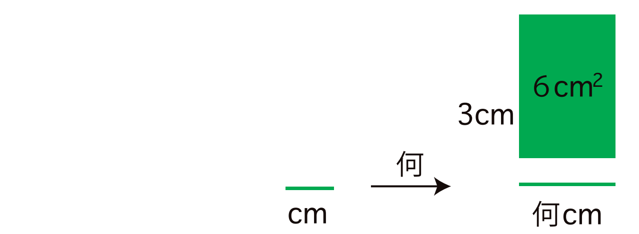
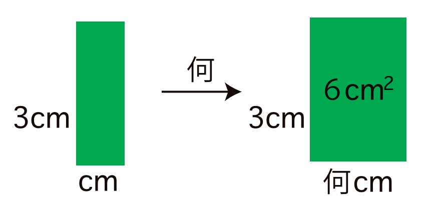
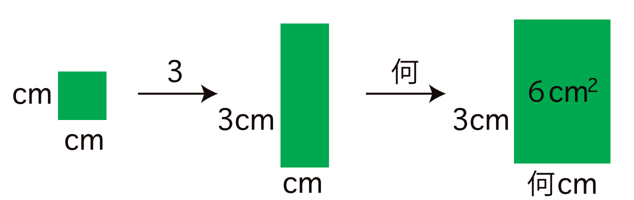
数式への還元のステップが，つぎのようになります：

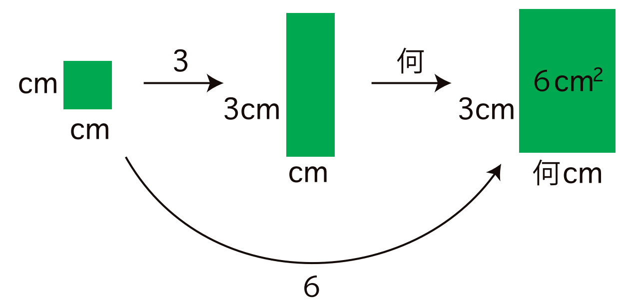
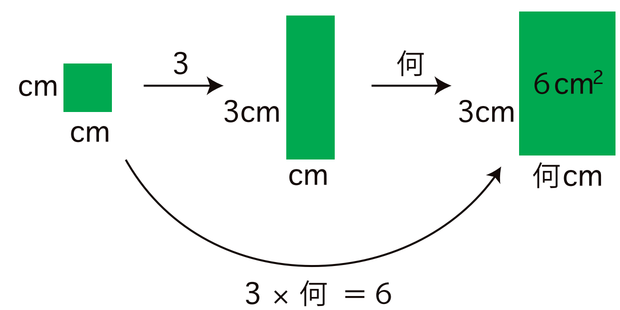
問題から<倍>の構造を抽出	何mの3倍が6mか？
問題を図式化	$ヤード \xrightarrow{何} 6フィート$
「○m」を分析	$\begin{tikzcd} フット \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & ヤード \arrow[r, "何"] & 6フィート \end{tikzcd}$
「×」の文法 $\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1 \times 数_2"'] & 量_b \arrow[r, "数_2"] & 量_c \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} フット \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "3 \times 何 = 6"'] & ヤード \arrow[r, "何"] & 6フィート \end{tikzcd}$
「÷」の文法 $m \times \bigcirc = \bigcirc \times m = n$ 「n ÷ m」	何＝ 6 ÷ 3

13.5.5「面積 6 cm², タテ 3 cm の長方形の ヨコは何 cm ？」

つぎのことを使います：

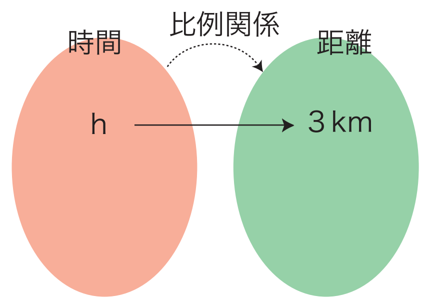
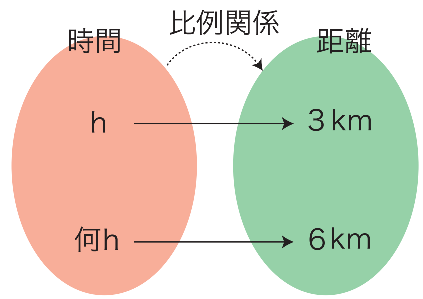
（＊）　*「隣り合う２辺の一方の辺の長さを固定したとき，他方の辺の長さと面積は比例関係にある。」*

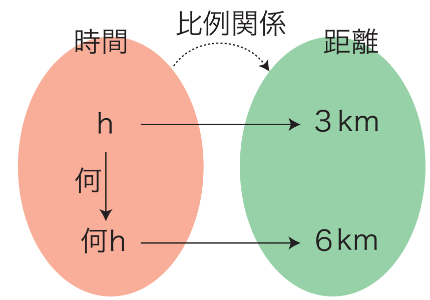
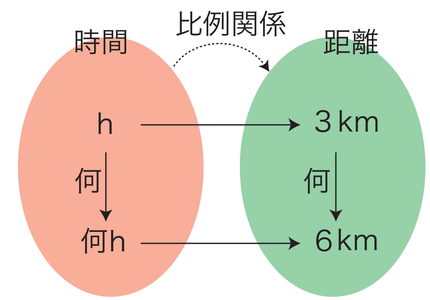
問題から ＜倍＞の構造 を抽出	
(＊) を適用	
	

「6 cm²」を分析	
「×」の文法	
「÷」の文法	何＝ 6 ÷ 3

13.5.6「3 km/h で 6 km 進むのに要する時間は？」

数式への還元のステップが，つぎのようになります：

問題を図式化	「3km/h」の含意	
	「何hで6km?」を書く	

「比例関係」の適用	「何 h」を分析	
	一方の「何」倍に他方の「何」倍が対応	
倍関係の問題として解く	倍関係の問題に還元	$3\mathrm{km} \xrightarrow{何} 6\mathrm{km}$
	「○km」を分析	$\begin{tikzcd} \mathrm{km} \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 3\mathrm{km} \arrow[r, "何"] & 6\mathrm{km} \end{tikzcd}$
	「×」の文法	$\begin{tikzcd} \mathrm{km} \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "3 \times 何 = 6"'] & 3\mathrm{km} \arrow[r, "何"] & 6\mathrm{km} \end{tikzcd}$
	「÷」の文法	何＝ 6 ÷ 3

第14講　位表現・位計算

ここでは，正負の数，複素数の使用として「位」表現が起こることを，示します。
この「位」表現では，３つの異なる存在「位･量･数」が現れます。

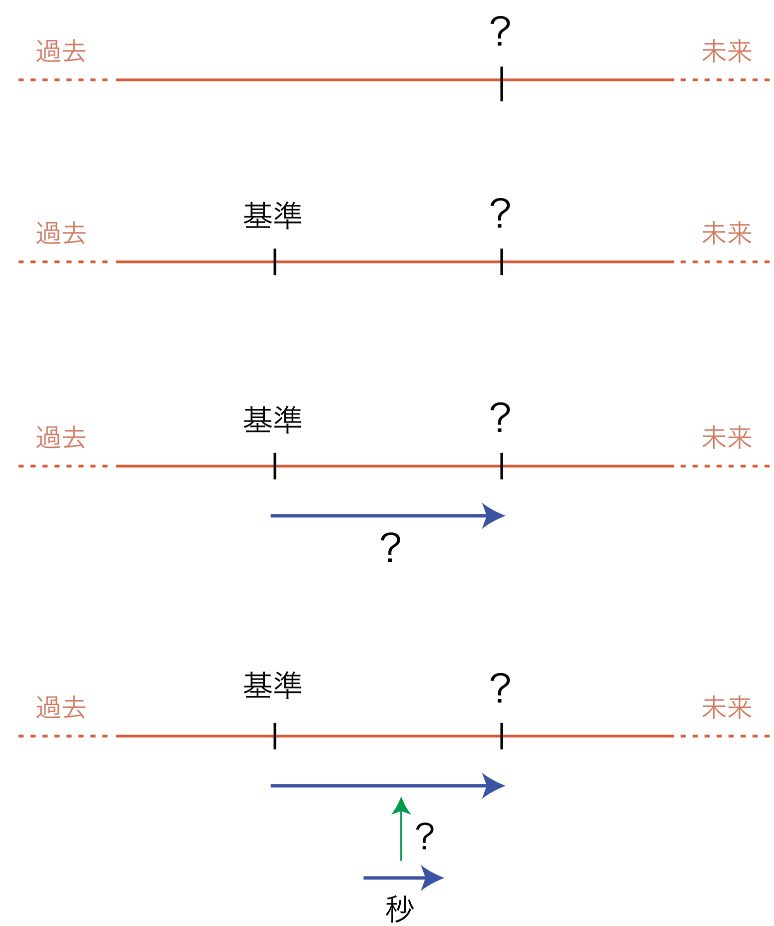
「位・量・数」は，わたしたちがごくあたりまえに数を使っているときの形です。したがって，例をもとに考えていけば，あたりまえの話として理解できます。

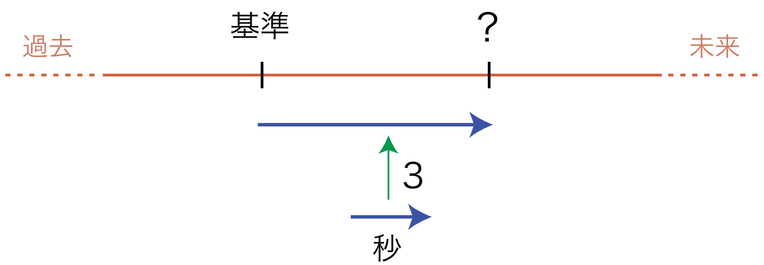
そこで，「位」の卑近な例となる「時刻」と「高度」から入ることにします。
この例で「位」の形式をとらえたところで，さらに「直線上の位置」「平面上の位置」において「位」の形式を確認していきます。

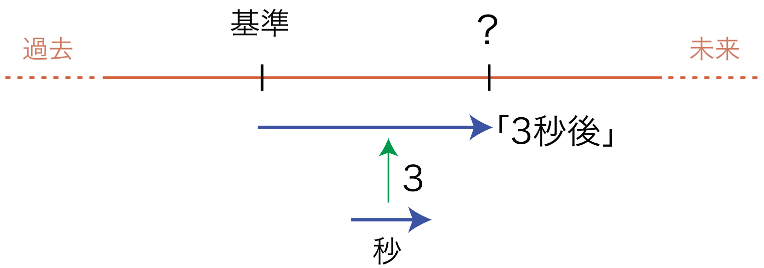
14.1 位の表現——導入

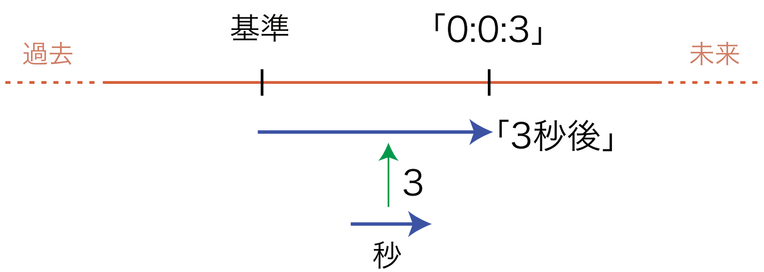
14.1.1 時刻の表現構造——時刻・時間・数

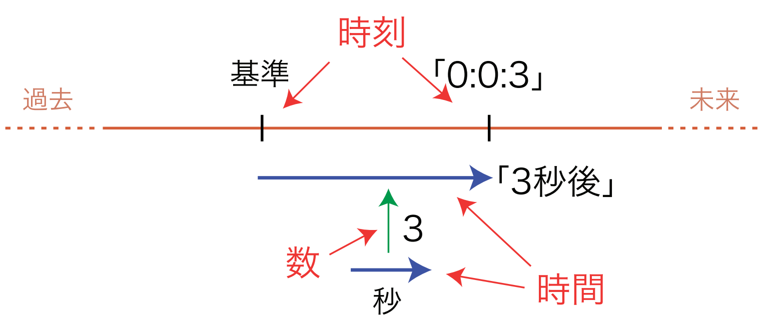
時刻の表現「0:0:3」のしくみを考えてみましょう。
これは，つぎのように分析されます：





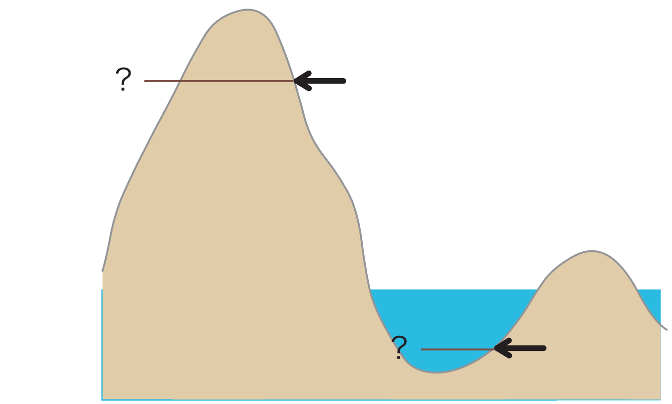


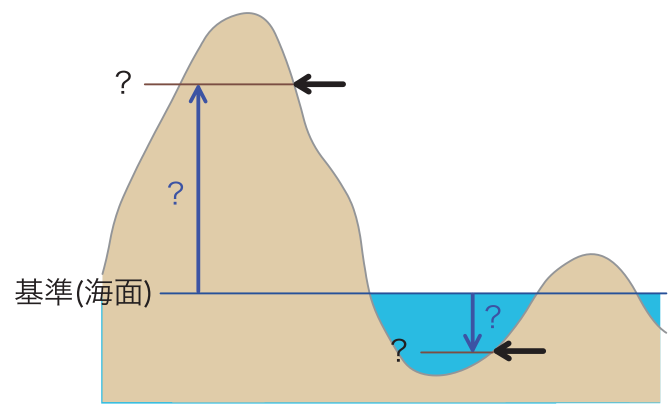


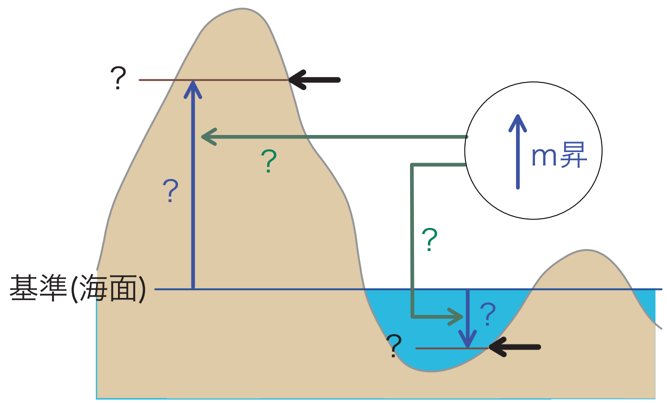


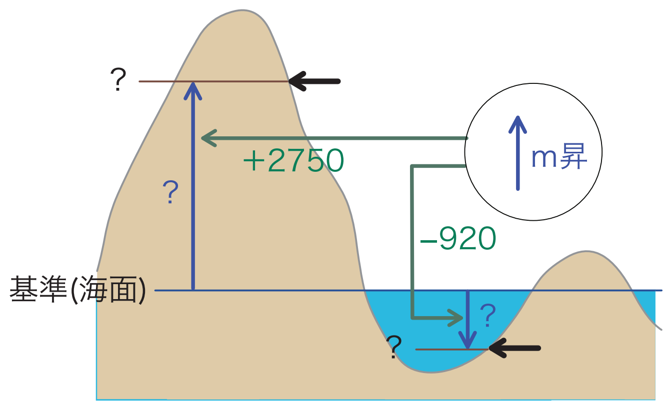
14.1.2 高さ/深さの表現構造——高さ/深さ・昇降・数

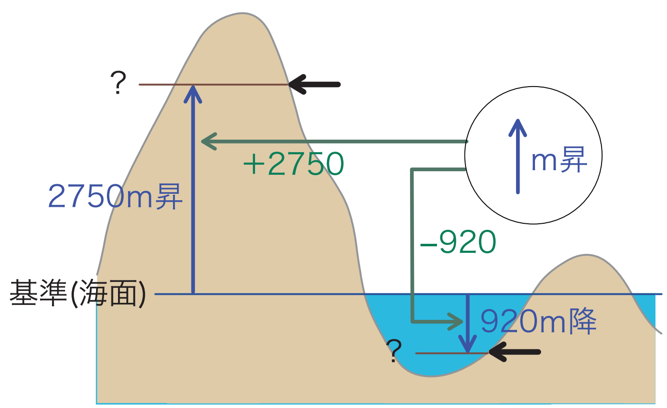
つぎに,「高度３km」「深度１km」の表現のしくみを考えてみましょう。山の高さ・海の深さの場合で考えると, つぎのように分析されます：

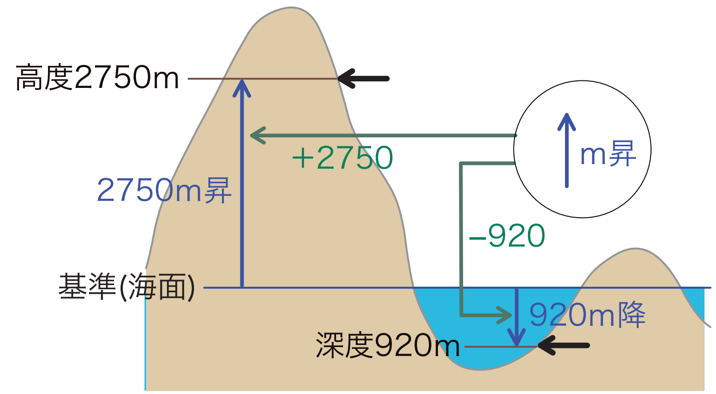




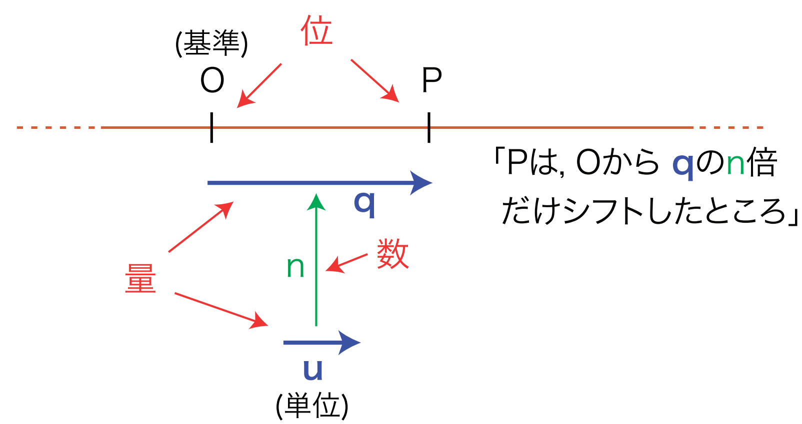








時刻の表現，高さ / 深さの表現の２つには，つぎの形式を見ることができます：

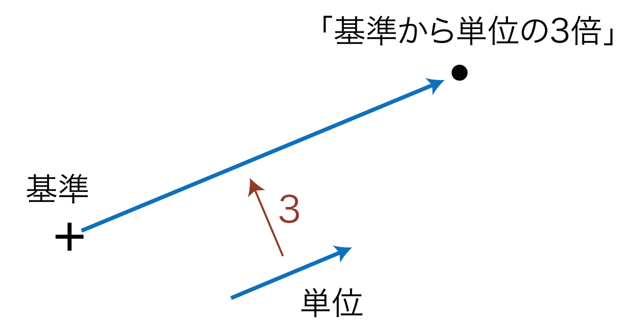


14.2　位表現の構造

14.2.1　位の表現――３種の存在：位・量・数

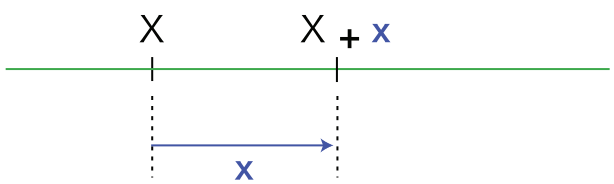
＜直線上の移動＞や＜平面上の移動＞に表現できる量の場合，数を使った量表現はさらに位 (位置) の表現へと進みます。

「*基準から単位の n 倍のところ*」が，このときの位の表現です：



14.2.2　＜シフト＞の作用

位のシフト (「ずらし」) を, 位に対する量の作用「+」として考えます。
即ち，つぎのイメージで考えます：



14.2.3　直線上の位置の表現——正負の数の使用

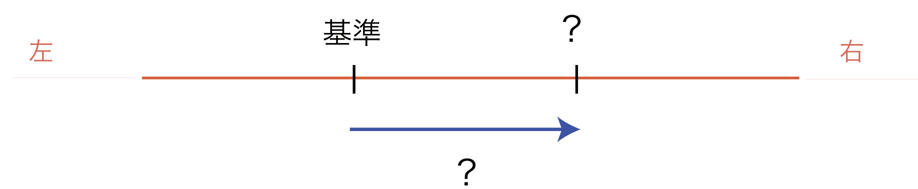
直線上の位置の表現は，つぎのようになります。——特に，直線上の位置の表現では，正負の数が使われることになります。

1. 位置の表現 (1)

直線上の位置 (直線上の一点の位置) を表す (定位) には····

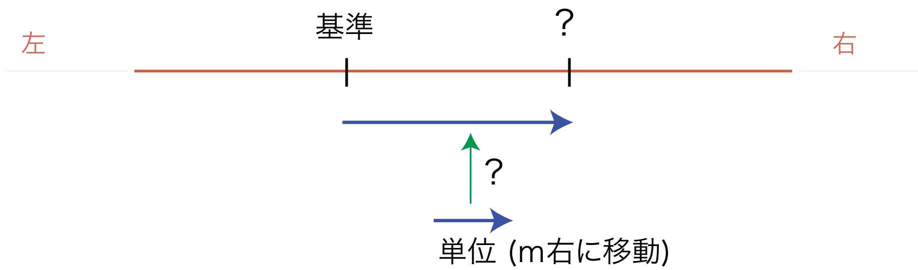
「基準」を任意にとって：

「基準からどれだけの変位 (移動)」で表す：

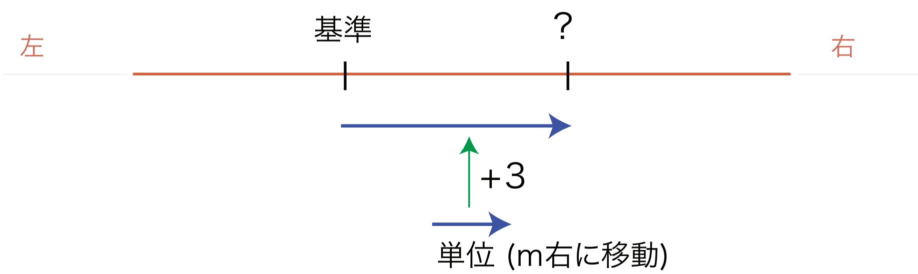


2. 変位 (移動) の表現

これは，量の表現 (既知) であり，「単位の何倍」で表すものになる：

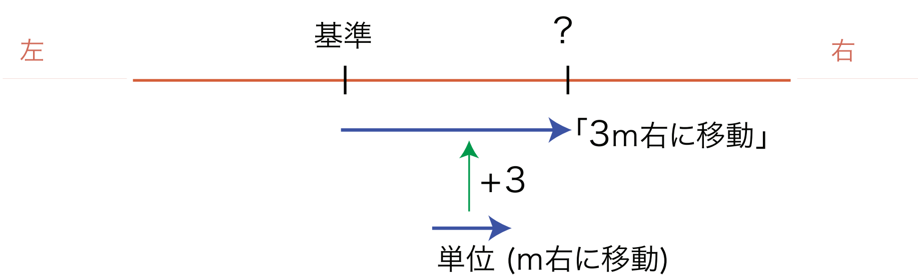


つぎのように表せたとする：

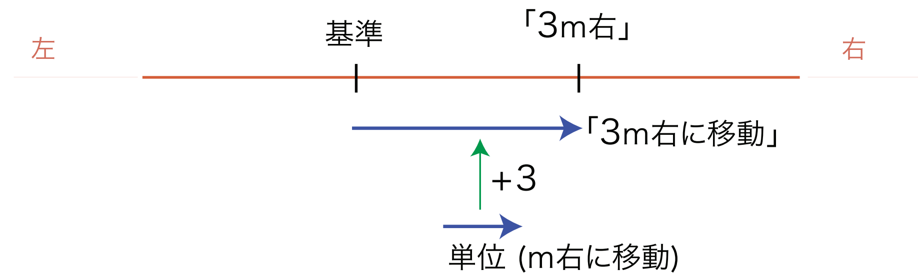


3. 位置の表現 (2)

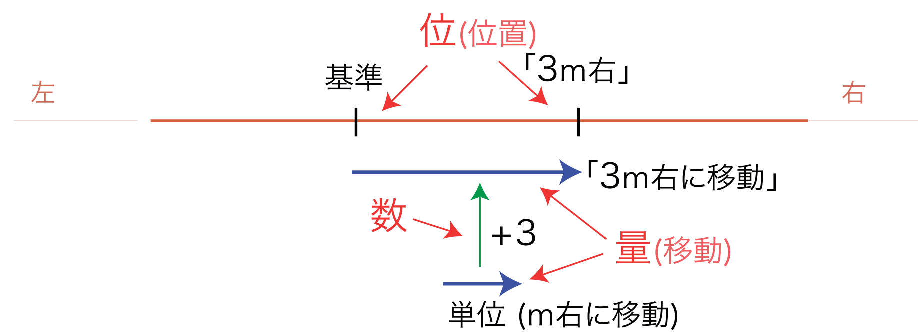
位置の表現 (1) と変位 (移動) の表現を合わせる：



そして，つぎの表現を得る：



ここには「位・量・数」の形式が認められます：



応用：時刻 / 年，高さ / 深さ，ビルの階数の表現

14.2.4　平面上の位置の表現——複素数の使用

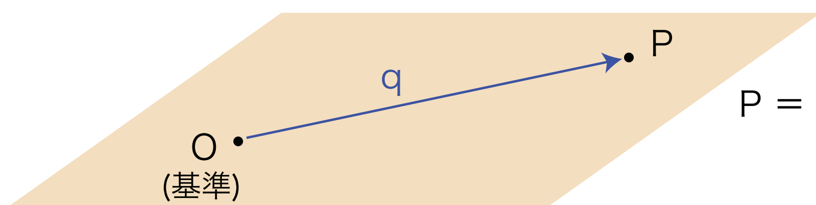
平面上の位置の表現は，直線上の位置の表現とまったく同型で，つぎのようになります。

1. 位置の表現 (1)

平面上の位置 (直線上の一点の位置) を表す (定位) には‥‥

「基準」を任意にとって：

「基準からどれだけの変位 (移動)」で表す：

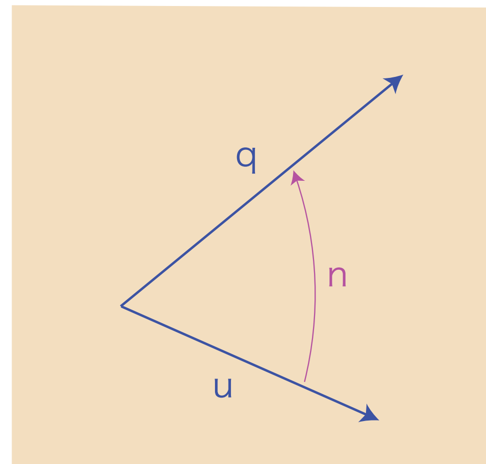


$$P = O + q$$

2. 変位 (移動) の表現

これは，量の表現 (既知) であり，「単位の何倍」で表すものになる。倍表現に使われる数は，複素数。 (→ §2.4)

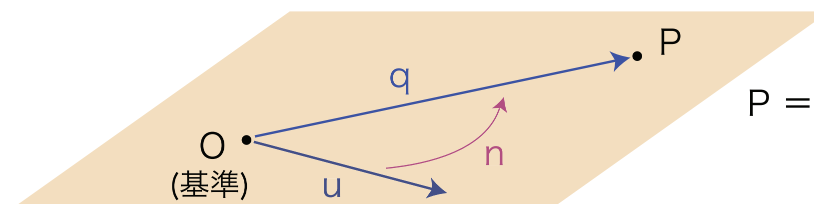
つぎのように表せたとする (n は複素数) :



$$q = u \times n$$

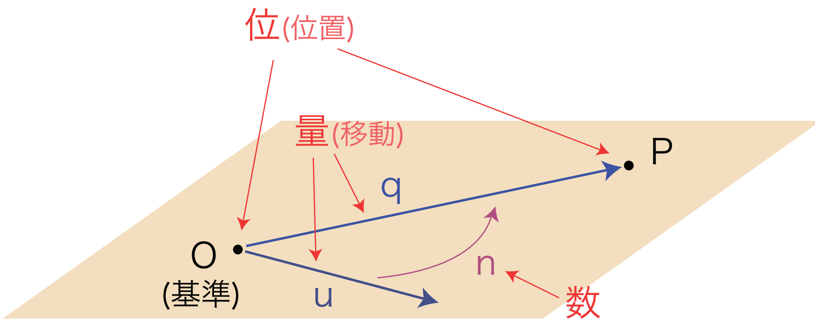
3. 位置の表現 (2)

位置の表現 (1) と変位 (移動) の表現を合わせて，つぎの表現を得る:



$$P = O + u \times n$$

ここには「位・量・数」の形式が認められます：



14.3.「数直線・数平面」

14.3.1 正負の数を直線上に配置

直線上の位置の表現を逆用して，正負の数を直線上に配置することができます。すなわち，つぎのような対応をつくることができます：

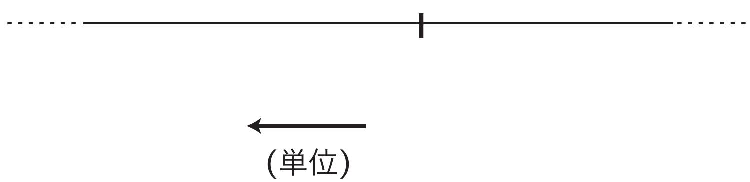
「*任意の数に対し，それに対応する直線上の一点が決まる。*」

方法は，つぎのようになります：

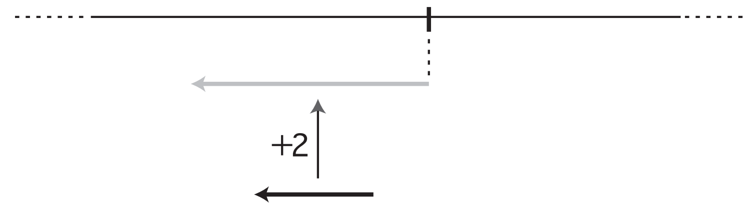
1. 直線を書く：

2.「基準」として，任意に一点をとる：

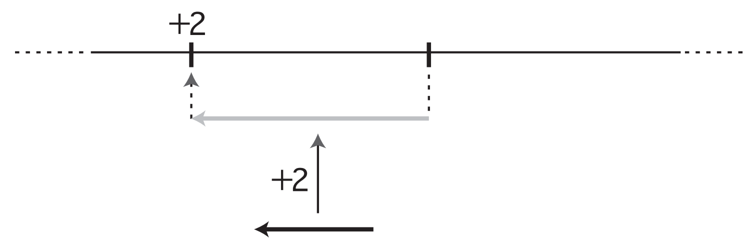
3. 直線と平行に有向線分を任意の長さ任意の方向で書き，「単位」とする：



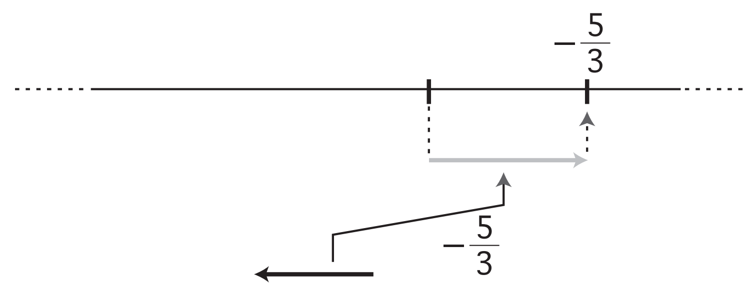
4. ＋ 2 に対応する点を求めるとしよう。
単位の (＋ 2) 倍の有向線分をつぎのように置く：



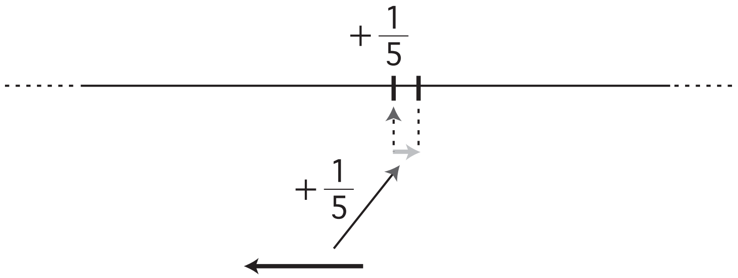
5. そして，つぎのように決まる直線上の点を，＋ 2 に対応する点とする:



6. 同様に，– 5/3 に対応する点はつぎのようになる：



7. 基準の点と対応する数はあるか？
数を 0 に近づけると，対応する点は基準の点に近づく：



8. よって，０に基準の点が対応している：

なおこの対応は，つぎのようになっています：

　数ａ，ｂに対応する点をそれぞれＡ，Ｂとするとき
　ａ＜ｂ ならば，Ａから見たＢの方向は単位の向きと同じ。

14.3.2　複素数を平面上に配置 (複素平面 / ガウス平面)

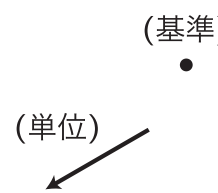
平面上の位置の表現を逆用して，複素数を平面上に配置することができます。すなわち，つぎのような対応をつくることができます：

　「*任意の数に対し，それに対応する平面上の一点が決まる。*」

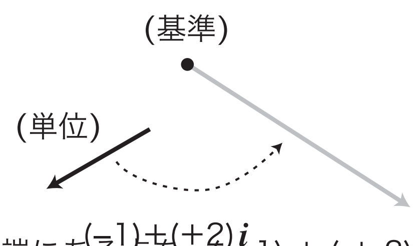
方法は，つぎのようになります：

1. 平面上の任意の一点を，「基準」としてとる：

2. 平面上に有向線分を任意の長さ任意の方向で書き，「単位」とする：

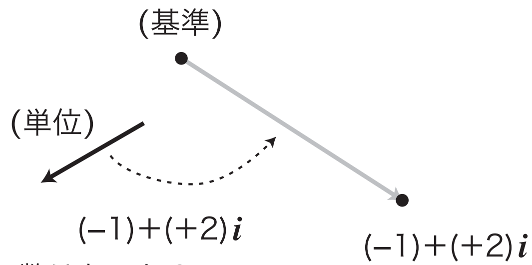


3. (– 1) + (+ 2)i　に対応する点を求めるとしよう。
　単位の (– 1) + (+ 2)i　倍の有向線分を，つぎのように置く：



4. そして，これの先端にある点を，(– 1) + (+ 2)i　に対応する点と

する：



5. 基準の点と対応する数はあるか？

ａ＋ｂｉ　のａ，ｂを０に近づけると，対応する点は基準の点に近づく。

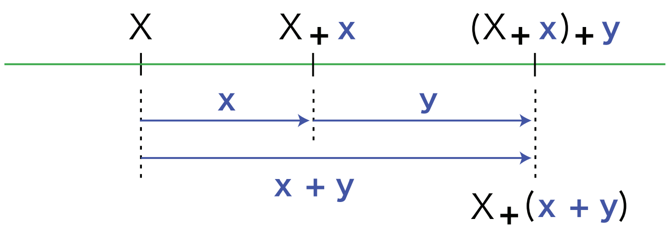
よって，０に基準の点が対応している：

14.4　位計算

14.4.1 位のシフトと量の和の間の関係

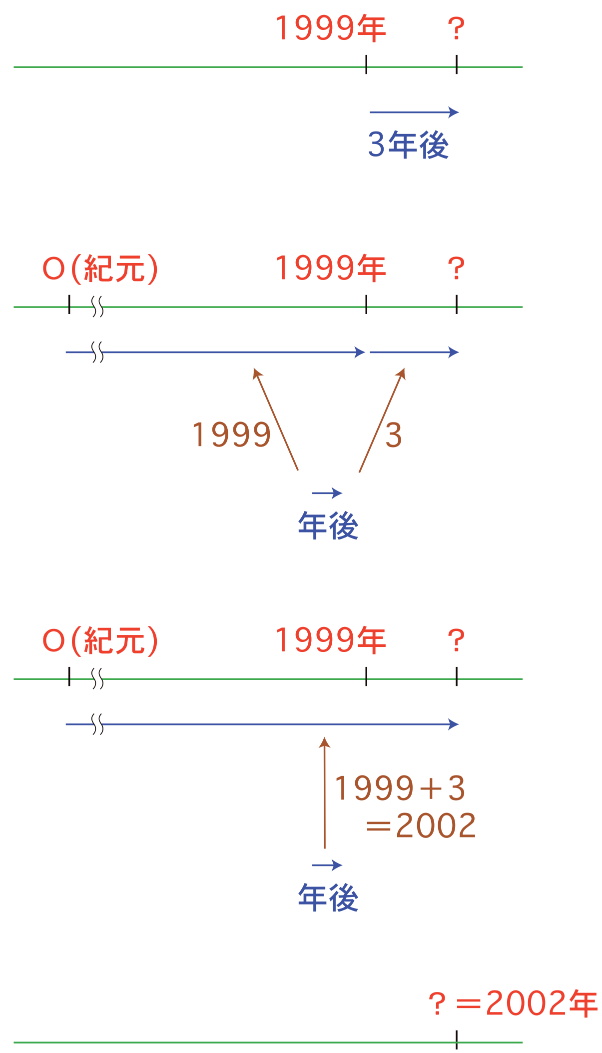
位のシフト「$_{+}$」は, 量の「**+**」とつぎの関係にあることが条件になります:

$$(X \,_{+}\, x) \,_{+}\, y = X \,_{+}\, (x \mathbf{+} y)$$



14.4.2「西暦 1999 年の 3 年後は ?」

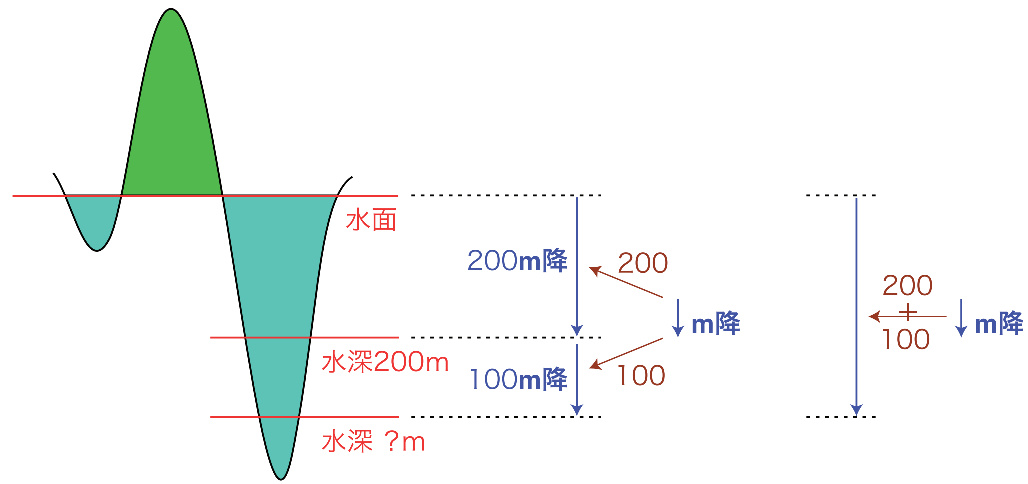
「西暦 1999 年の 3 年後は？」の計算は，つぎのようになります：



西暦 1999 年の 3 年後
= (紀元 + (年後 × 1999)) + (年後 × 3)
= 紀元 + ((年後 × 1999) **+** (年後 × 3))
= 紀元 + (年後 × (1999 + 3))
= 紀元 + (年後 × 2002)
= 西暦 2002 年

14.4.3「水深 200m から 100m 降下は，水深何m ?」

「水深 200m から 100m 降下したら，水深何m ？」の計算は，つぎのようになります：



水深 200m から 100m 降下
= (水面 + (m 降 × 200)) + (m 降 × 100)
= 水面 + ((m 降 × 200) **+** (m 降 × 100))
= 水面 + (m 降 × (200 + 100))
= 水面 + (m 降 × 300)
= 水深 300m

第15講　試験

おわりに

本テキストは，数の意味が「量の比」であることを読者に理解してもらう目的で書いています。したがって，これの理解にとって「雑音」になることをできるだけ排除するように書きました。特に，論理の厳格性の点で「適当に逃げて」いるところもあります。(それでもけっこうな長さのテキストになっていますが。)

本テキストでは，量を扱うために人が数をつくったと述べています。しかし，数をつくった当人がこの意識で数をつくったかどうかは，別問題です。数の成り立ちは，個別的に数学史の内容になります。

本テキストでは数はひとのつくった道具，すなわち人為ですが，数を人為以前の存在として考える立場が一方にあります。この場合 ,「人は数を発見するに過ぎない」ということになります。この考え方は，イデア論を源にもつ西洋哲学ではいまでもむしろ主流かも知れません (「実在論」と呼ばれます)。

本テキストでは,「数」の意味を「自然数，分数，正負の数，複素数，‥‥に通底する形式」として述べています。このとき，この形式の内容に直接関係しないものを「雑音」として捨てているわけですが，この捨てられたものの一つに自然数の話があります。

数は，既存の数を素材にしてつくられます。したがって，数の構成を遡れば，どこかで「ゼロからの数の構築」がなければなりません。これが自然数の場合です。

よって, 自然数の話は,「ゼロからの数の構築」の内容が主になります。さらに，自然数特有の用途が，内容に加わります。

これらの内容については，『いろいろな数がつくられるしくみ』にあたってください。

数学では,「数の構築」の主題で，自然数，整数，有理数，実数，複素数，‥‥ の構築を論じます。ここには，量は現れません。

「量」は, 数の意味論が必要とするものです。 結果を先取りすれば,「量」無しで (意味抜きで) 数を構成できます。――数学の方法論にはひとつに「純粋形式言語たらん」というのがあり，「数の構築」はこの立場で論述されます。

ただしこのときには，構築している当のものがどんな資格 / 条件から「数」と呼ばれるのかは，述べられません。「それを考えるのは読者の仕事」ということになってしまうわけです。

読者は，このことを念頭においた上で，数学の「数の構築」が実際どんなふうになっているか，一度見てみるとよいでしょう。

また，数学専門課程の学生ならば，この「数の構築」を学習することで，数学の基礎である「論理・集合」の基本的な考え / 手法を勉強することができます。

宮 下 英 明 (みやした ひであき)

1949 年，北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て，現在，北海道教育大学教育学部教授。数学教育が専門。

図解　現職教員・教員養成コース学生＆数をわかりたい人のための

「数」がわかる本 講義編 (1)

「数の理解」15 講

2011-01-28　初版アップロード (サーバー：m-ac.jp)

著者・サーバ運営　宮下英明

サーバ　m-ac.jp

http://m-ac.jp/

m@m-ac.jp