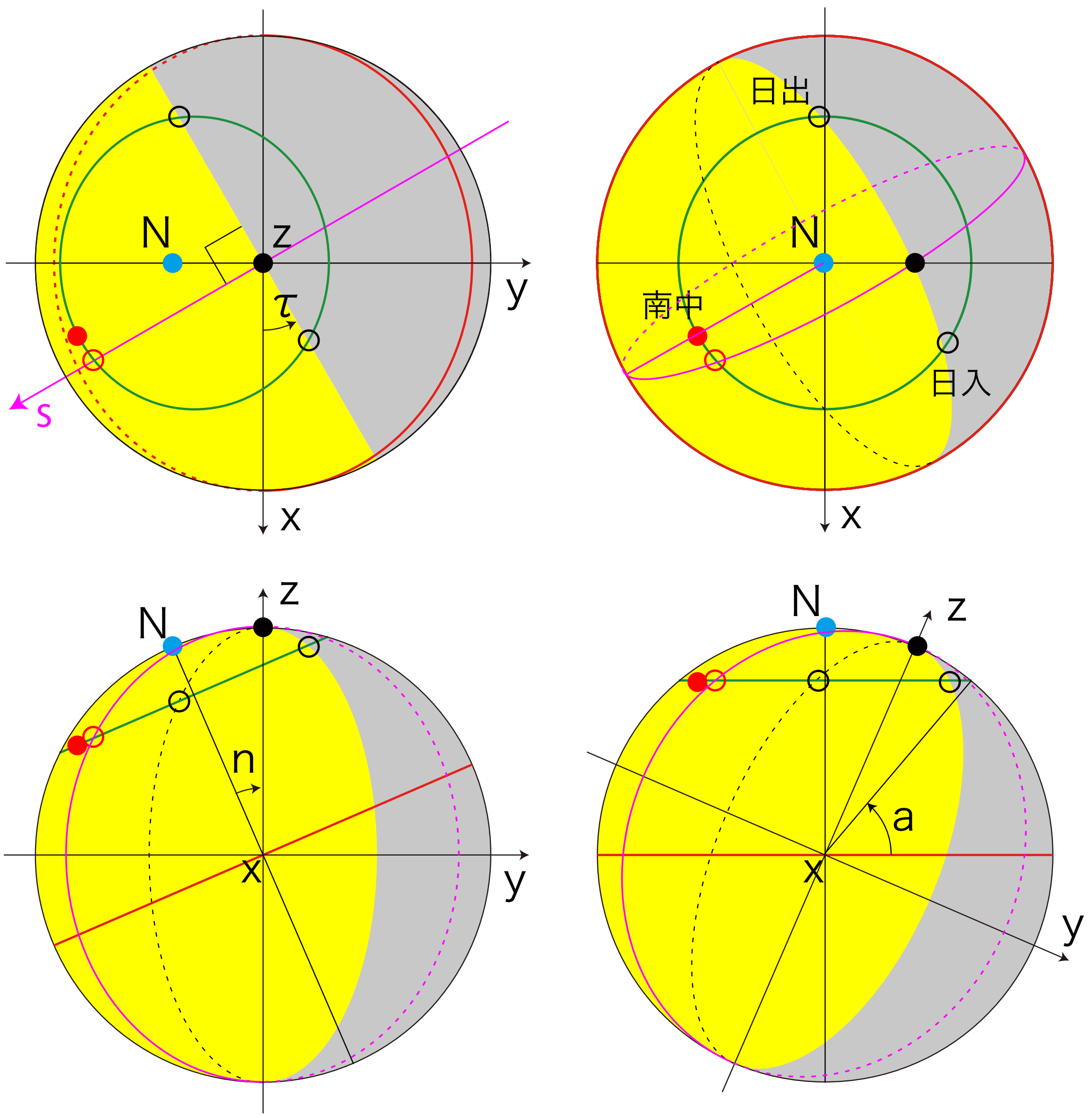
図説：「年と日」の数理

日出・日入の年間変化, 1日の太陽の動き, 等々

宮下英明 著

Ver. 2024-01-03



１日の太陽の動きは，１年を通じて規則的に変化する。──実際，変化の一巡が「年」を定義する，
この変化は，地球の自転軸が，地球が太陽を回る公転軌道面に対して傾いている (垂直でない) ことに因る。傾きは地球 / 宇宙の進化の中で変化しており，現在は「23.4 度」。

１日の太陽の動きとこれの年間変化は，つぎの単純モデルを用いるとき，高校数学レベルの計算で求めることができる：

1. 地球は球体で，自転軸は中心を通る
2. 地球の中心と公転軌道と太陽は，１つの平面上にある
3. 公転軸に対する自転軸の傾きは，一定
4. 自転軸と公転軸が張る平面は，公転においてつねに平行
5. 自転角速度と公転角速度は一定

ここでは，この計算法を示す。

本書について

本書は ,
　http://m-ac.jp/
のサイトで書き下ろしている『図説:「年と日」の数理』を PDF 文書の形に改めたものです。

文中の青色文字列は，ウェブページへのリンクであることを示しています。

目次

本文イラスト，ページレイアウト，表紙デザイン：著者

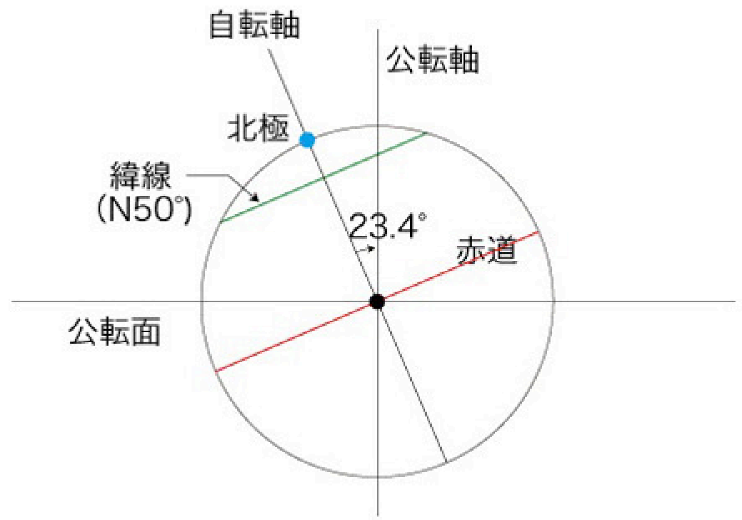
図説:「年と日」の数理

0　導入

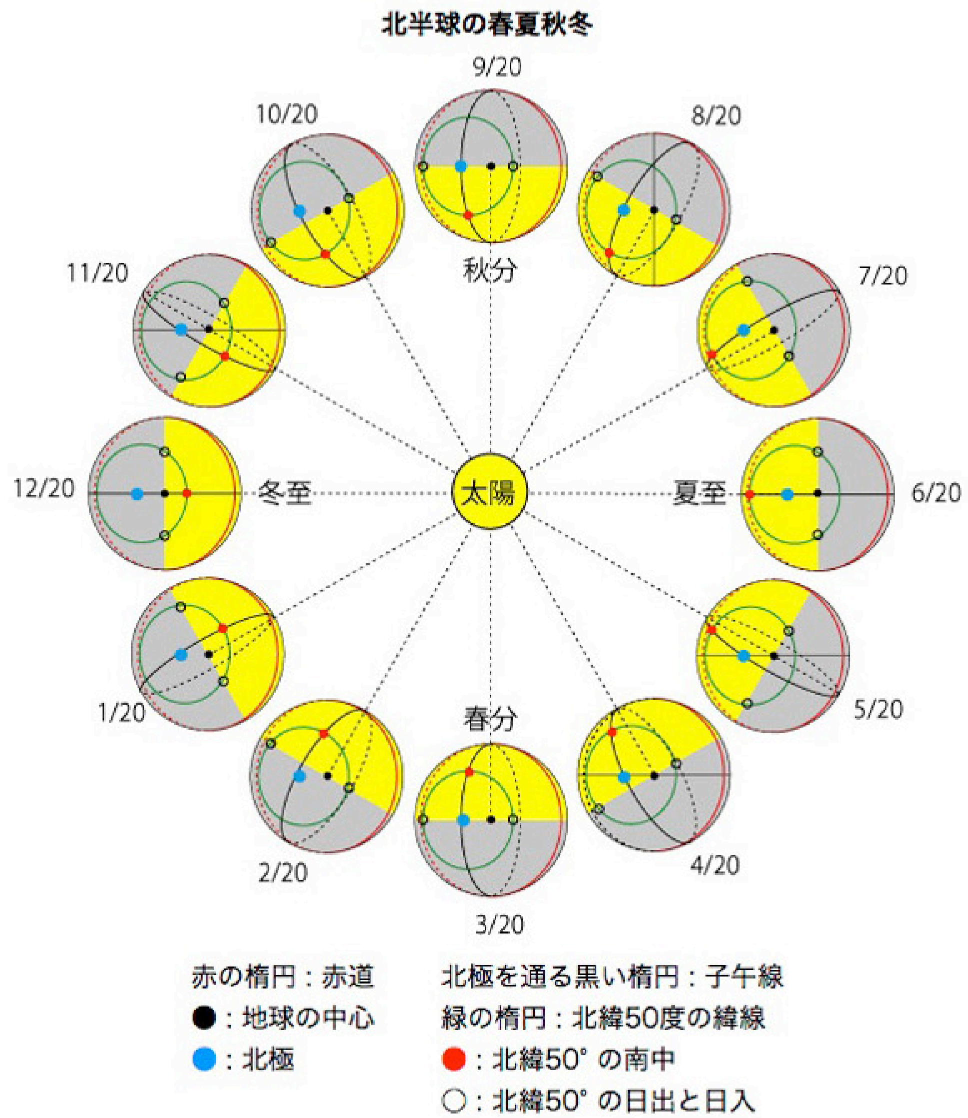
0.1　年

0.1.1 「春夏秋冬」

地球の自転軸は，公転軌道面に対して傾いている：



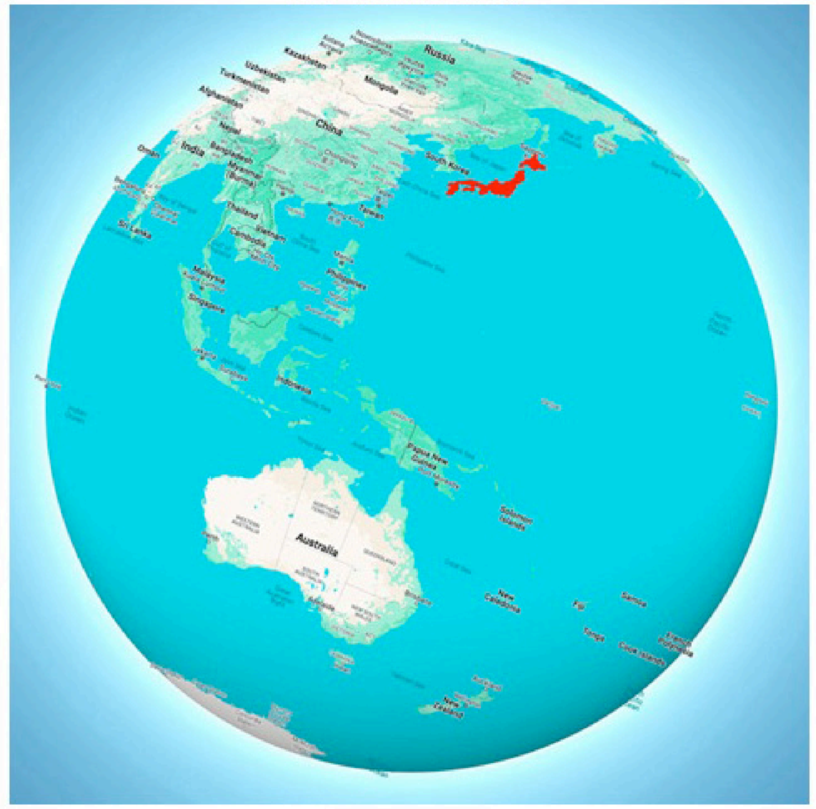
このことの効果として，公転は，太陽光線の照射角度および日中時間の変化の一巡になる。
そしてこれは，春夏秋冬を現象する。



つぎは，＜太陽から見た南中時の日本＞の位置が，春分・夏至・秋分・冬至でどれほど違うかを示したもの：

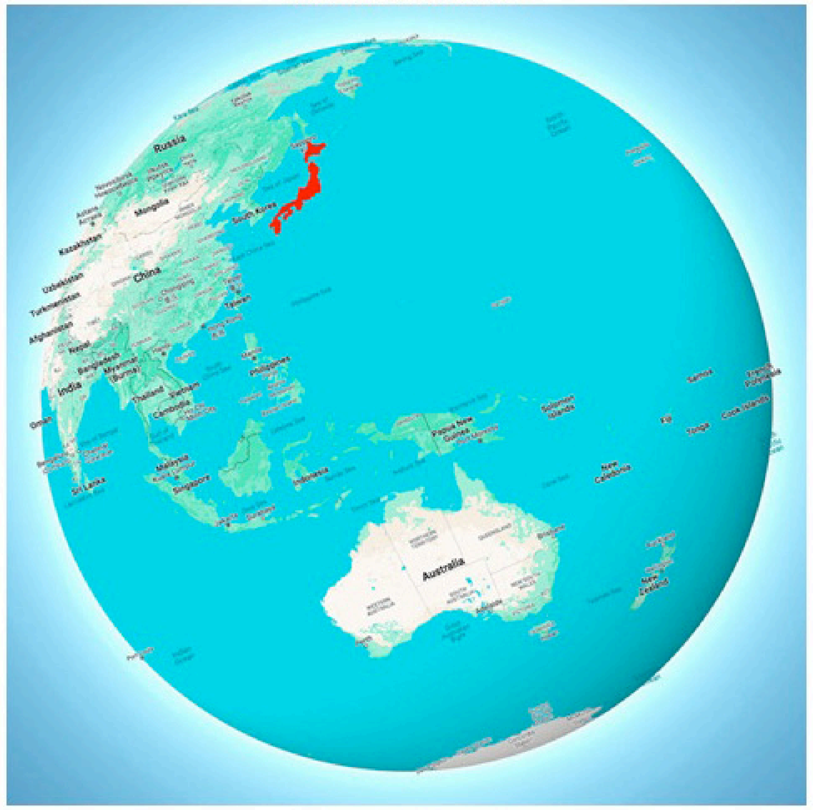
地球地図の画像は，Goole Map (地球表示) から引用

春分の南中時の日本

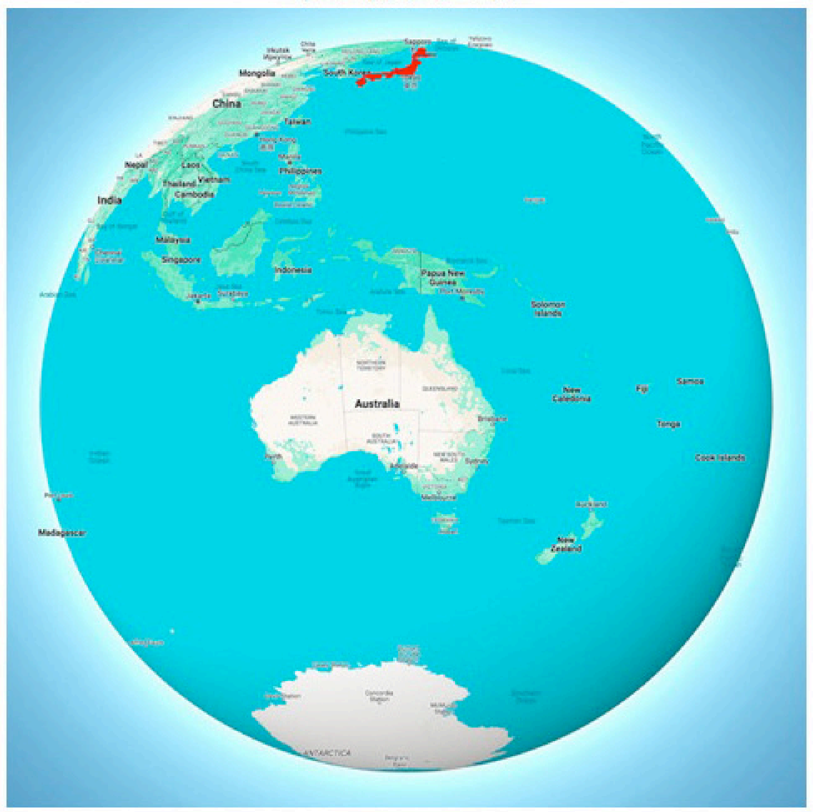


夏至の南中時の日本

秋分の南中時の日本

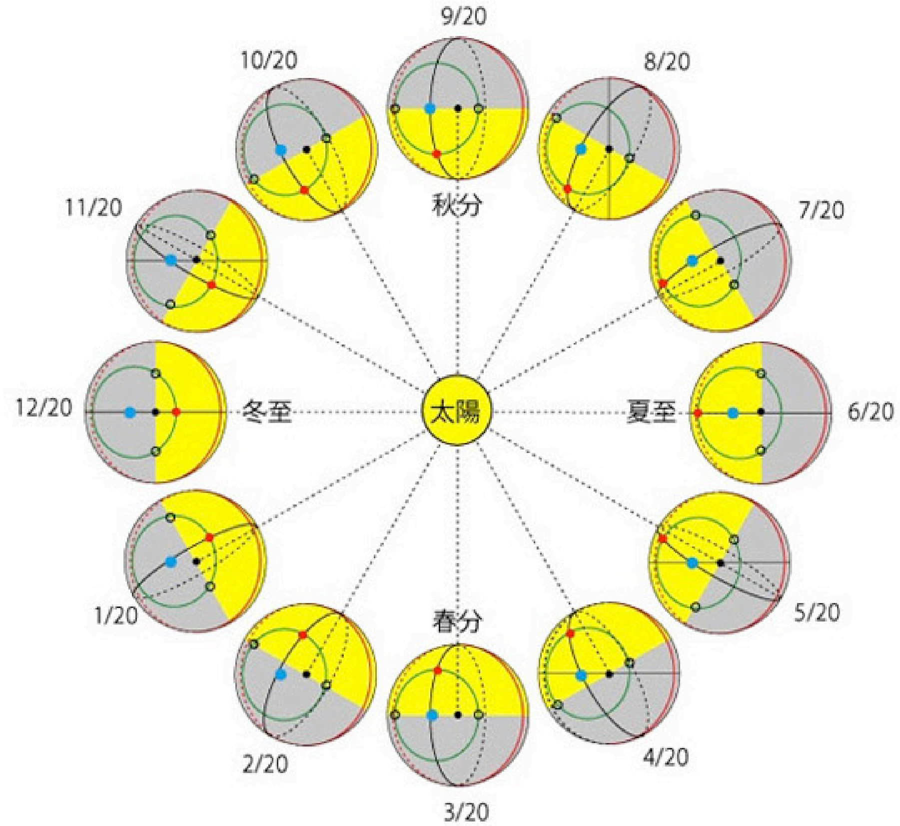


冬至の南中時の日本



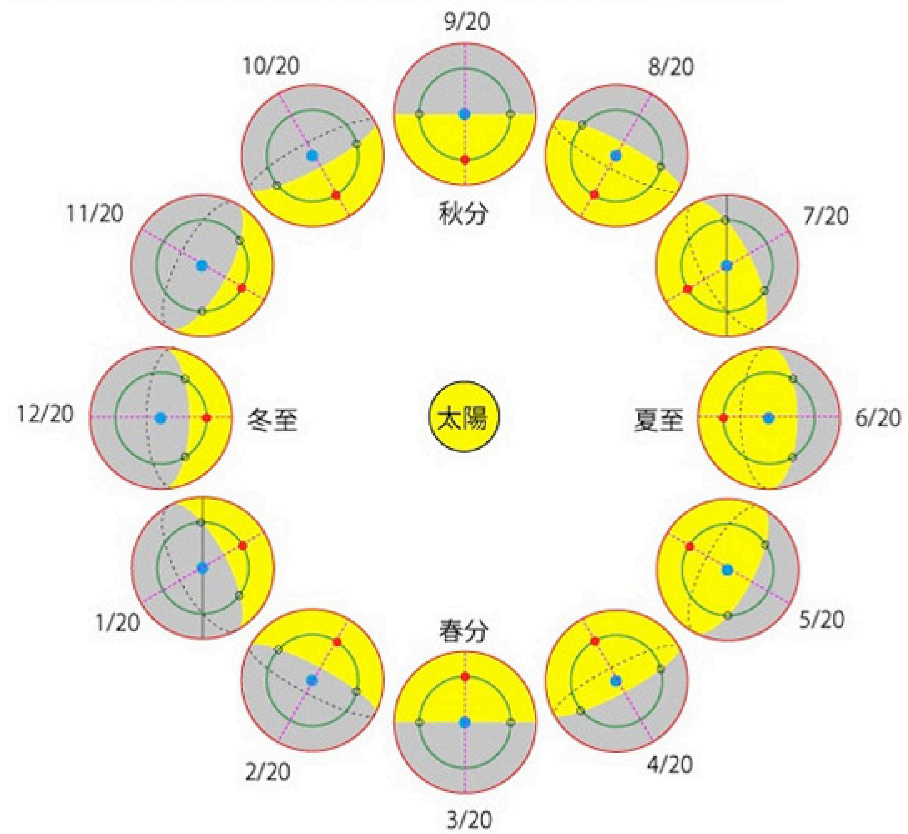
0.1.2 「秋の日は釣瓶落し」

四季は，つぎの＜公転による日中時間の変化＞の現象である：



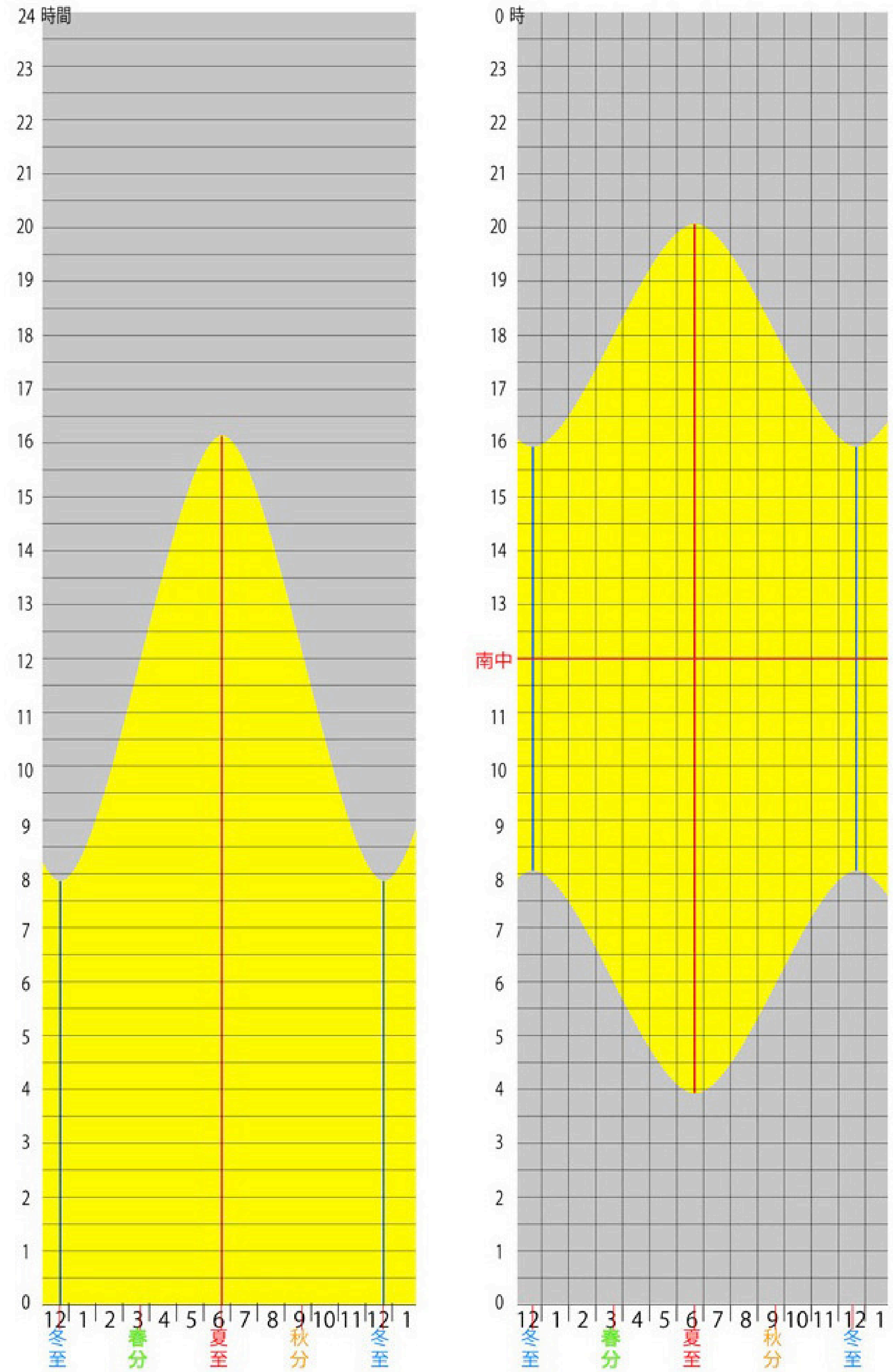
赤の楕円：赤道　　北極を通る黒い楕円：子午線
●：地球の中心　　緑の楕円：北緯50度の緯線
●：北極　　●：北緯50° の南中
○：北緯50° の日出と日入

実際，上の図の地球を個々に＜北極を真上から見る図＞に置き換えると，日中時間の変化がよくわかる (全体の俯瞰でこのように見えることはない)：



つぎのグラフは，左が昼夜の時間の年間変化を，右が日出・日入の時刻の年間変化を，それぞれ表したものである：

北緯50° の場合



日中の時間が短くなるのは夏至から冬至にかけてであるが，変化の大きさは，秋分の前後が最も大きい：

北緯50° の場合

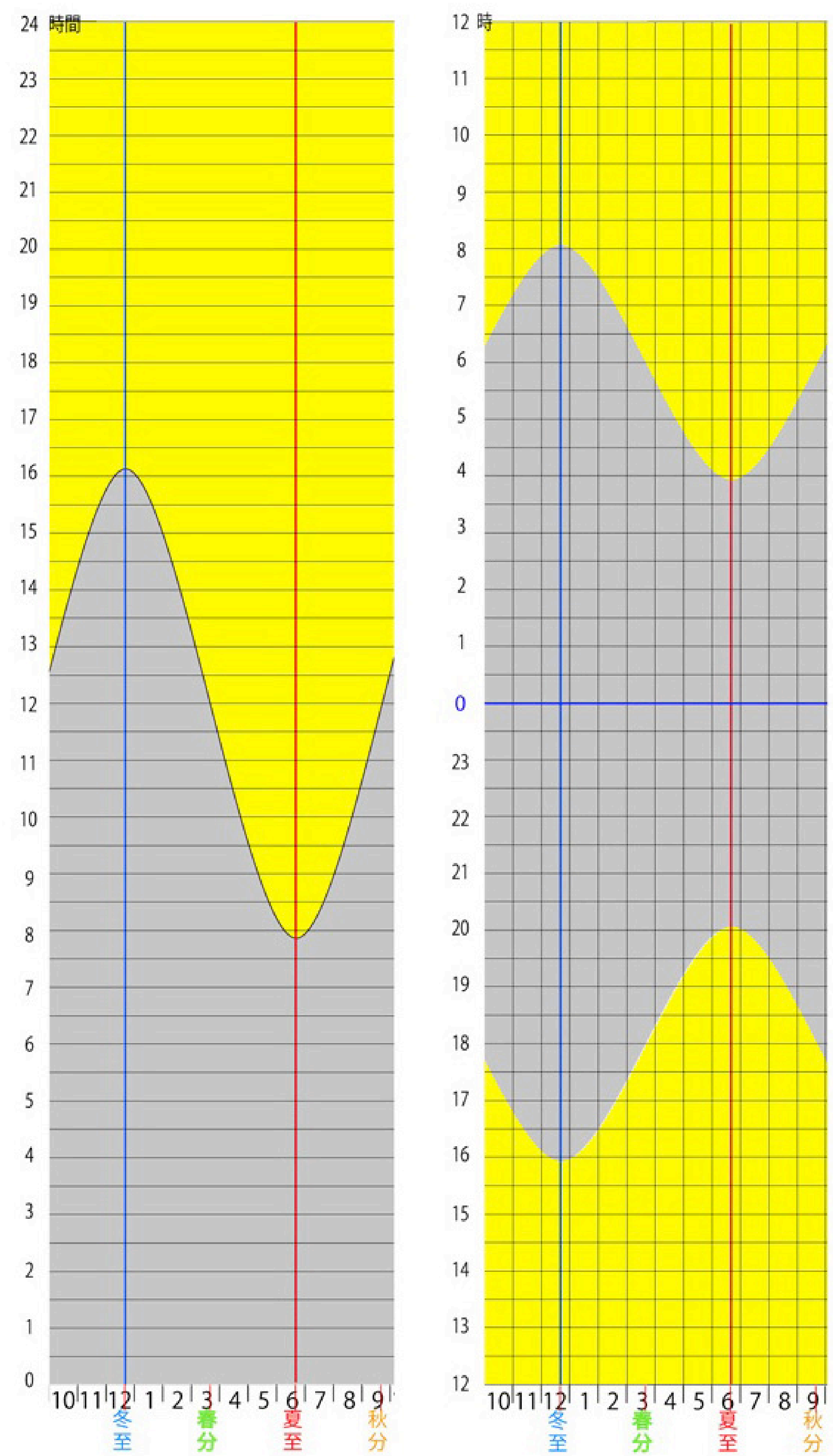
公転角度(τ)	経度				日中時間 (分)	
	日出	南中	日入	北中		
0 (夏至)	149	270	31	90	968	—
5	155	275	36	92	967	-1
10	160	281	41	94	963	-4
15	167	286	46	97	957	-6
20	173	292	50	99	949	-8
25	180	297	54	101	937	-12
30	186	302	58	104	927	-10
35	193	307	62	107	914	-13
40	200	312	65	109	899	-15
45	207	317	68	112	883	-16
50	214	322	71	115	867	-17
55	221	327	73	118	850	-17
60	228	332	76	122	832	-18
65	235	337	79	126	814	-18
70	242	342	81	130	795	-18
75	249	346	83	134	777	-19
80	256	351	86	139	758	-19
85	263	355	88	144	739	-19
90 (秋分)	270	0	90	149	720	-19
95	277	5	92	155	701	-19
100	284	9	94	160	682	-19
105	291	14	97	167	663	-19
110	298	18	99	173	645	-19
115	305	23	101	180	626	-18
120	312	28	104	186	608	-18
125	319	33	107	193	590	-18
130	326	38	109	200	573	-17
135	333	43	112	207	557	-17
140	340	48	115	214	541	-16
145	347	53	118	221	526	-15
150	354	58	122	228	513	-13
155	0	63	126	235	503	-10
160	7	68	130	242	491	-12
165	13	74	134	249	483	-8
170	20	79	139	256	477	-6
175	25	85	144	263	473	-4
180 (冬至)	31	90	149	270	472	-1

電気照明の無い昔は，太陽が出ている時間は貴重であった。
ひとは日中時間を無駄にしないために，日出とともに仕事を開始した。
日が沈んで暗くなるまでが仕事時間であった。
したがって，日中の時間の長さの変化には敏感になる。
こうして，「秋の日は釣瓶落し」の感概になるというわけである。

0.1.3 「春眠不覚暁」

つぎのグラフは，左が昼夜の時間の年間変化を，右が日入・日出の時刻の年間変化を，それぞれ表したものである。
日中の時間が長くなるのは冬至から夏至にかけてであるが，冬至から春分までは日の出の遅い日が続く。

北緯50° の場合



春 眠 不 覚 暁
処 処 聞 啼 鳥
夜 来 風 雨 声
花 落 知 多 少
孟浩然

「春眠不覚暁」の感慨は，「まだ暗いなあ」である。
まだ暗いから，布団の中なのである。
そして，まだ暗い中で鳴き始めている鳥の声を聞いたり，そういえば夜間に風雨があったけど花がだいぶ落ちたんじゃないかなあと思ったりしているわけである。

この詩の「春」は，現代人の謂う「暦の上の春」である。
昔は，現代人の謂う「暦の上の春」が正真正銘の「春」。
それは春分 (3月20日頃) の前後1.5か月の期間。
即ち，２月5日頃から５月5日頃までが「春」である。
朝の頃合いなのに外がまだ暗いということで，詠っている時期は，２月上旬から３月のはじめくらいだろう。

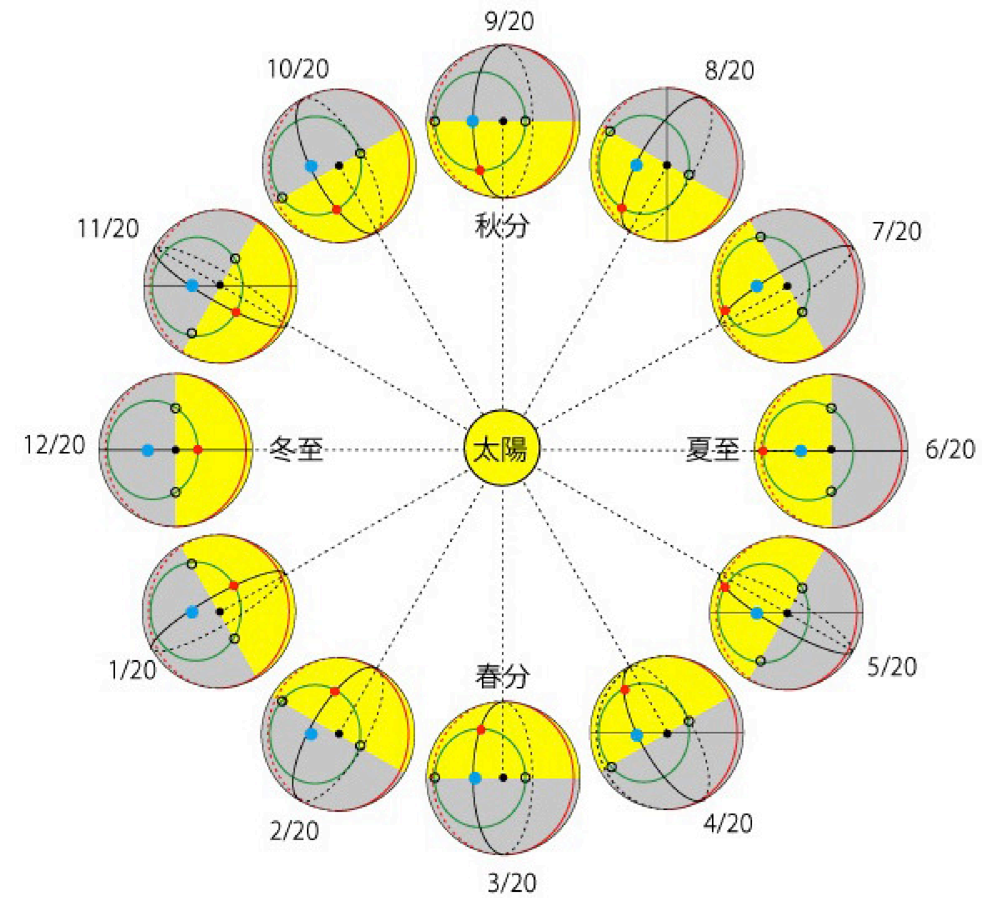
詠っている「季節」が捉えられないと，この詩はとんでもない解釈を捻り出してしまうことになる。
それが「春眠は気持ちが良いから朝寝坊をしてしまう」である。
そして，誤った通念である「鳥は夜が明けてから鳴き出す」が，この解釈を後押しするというわけである。 ――実際は，鳥は暗いうちから鳴き出す。

「春眠不覚暁」は，命題として述べられている。
「朝寝坊」の解釈だと，春はいつも朝寝坊していなければならなくなる。

しかし困ったことに，世の中に流布している解釈は，この誤った解釈の方なのである。
古典の解釈を教条的に教える学校教育に馴らされた者は，「春眠は気持ちが良い」に共感できないのは知性・感性に劣ることだと思い，「春眠って格別のものかよ？」の疑問を自ら封じるのである。

0.1.4「白夜」

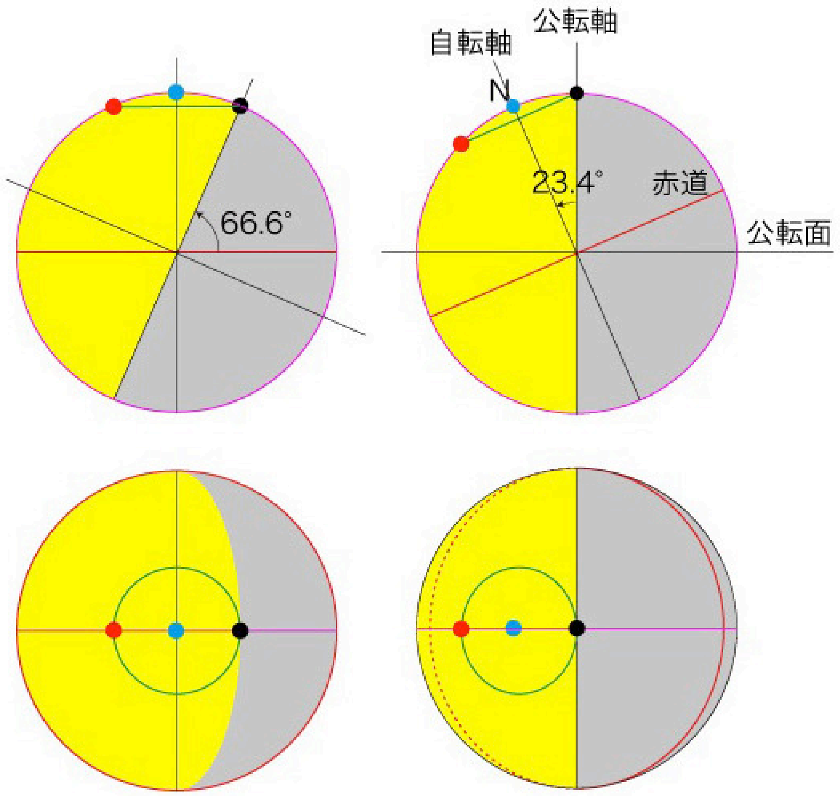
日中時間の季節による変化は，緯度が高いほど大きくなる。



赤の楕円：赤道　　北極を通る黒い楕円：子午線
●：地球の中心　　緑の楕円：北緯50度の緯線
●：北極　　●：北緯50° の南中
○：北緯50° の日出と日入

北半球の高緯度地帯では，夏は一日中太陽が沈まない「白夜」になり，冬はその逆(一日中太陽が昇らない) になる。

例：夏至の時「白夜」になる地帯
地軸の傾きを 23.4° とすると，北緯66.6° (= 90°−23.4°) 以北。



0.1.5「日入が最も早いのは，冬至の日ではない」

夏至の日は日中の時間がいちばん長く，冬至の日は最も短い。
しかし夏至の日は，日出がいちばん早い日でも，日入がいちばん遅い日でもない。
冬至の日は，日出がいちばん遅い日でも，日入がいちばん早い日でもない。

こうなるのは，公転角度に対する南中点と正午点が，(夏至・秋分・冬至・春分を除いて) 一致しないためである。

☞ 南中と正午

以下に，日出・南中・日入時刻の年間変化表を示す：

緯度 50° の場合

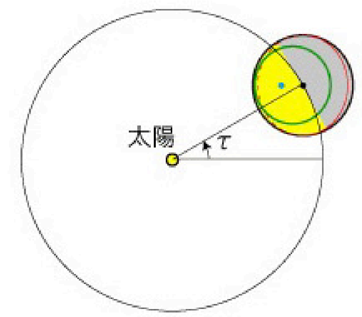
公転角度	月/日	時刻		
		日出	南中	日入
0	6/20	3:57:8	12:0:0	20:2:52
5	6/25	3:59:32	12:1:47	20:4:1
10	6/30	4:3:6	12:3:30	20:3:53
15	7/5	4:7:42	12:5:5	20:2:28
20	7/10	4:13:14	12:6:31	19:59:48
25	7/15	4:21:15	12:7:43	19:55:56
30	7/20	4:26:24	12:8:40	19:50:56
35	7/25	4:33:46	12:9:21	19:44:55
40	7/31	4:41:28	12:9:43	19:37:59
45	8/5	4:49:22	12:9:48	19:30:13
50	8/10	4:57:24	12:9:35	19:21:45
55	8/15	5:5:29	12:9:4	19:12:40
60	8/20	5:13:33	12:8:18	19:3:4
65	8/25	5:21:35	12:7:18	18:53:1
70	8/30	5:29:34	12:6:6	18:42:38
75	9/4	5:37:29	12:4:43	18:31:58
80	9/9	5:45:21	12:3:13	18:21:5
85	9/14	5:53:11	12:1:38	18:10:5
90	9/19	6:0:59	12:0:0	17:59:1
95	9/24	6:8:47	11:58:22	17:47:57
100	9/29	6:16:37	11:56:47	17:36:57
105	10/4	6:24:29	11:55:17	17:26:4
110	10/10	6:32:24	11:53:54	17:15:24
115	10/15	6:40:23	11:52:42	17:5:1
120	10/20	6:48:25	11:51:42	16:54:58
125	10/25	6:56:29	11:50:56	16:45:22

130	10/30	7:4:34	11:50:25	16:36:17
135	11/4	7:12:36	11:50:12	16:27:49
140	11/9	7:20:30	11:50:17	16:20:3
145	11/14	7:28:12	11:50:39	16:13:7
150	11/19	7:35:34	11:51:20	16:7:6
155	11/24	7:40:43	11:52:17	16:2:6
160	11/29	7:48:44	11:53:29	15:58:14
165	12/4	7:54:16	11:54:55	15:55:34
170	12/9	7:58:52	11:56:30	15:54:9
175	12/14	8:2:26	11:58:13	15:54:1
180	12/20	8:4:50	12:0:0	15:55:10
185	12/25	8:5:59	12:1:47	15:57:34
190	12/30	8:5:51	12:3:30	16:1:8
195	1/4	8:4:26	12:5:5	16:5:44
200	1/9	8:1:46	12:6:31	16:11:16
205	1/14	7:57:54	12:7:43	16:19:17
210	1/19	7:52:54	12:8:40	16:24:26
215	1/24	7:46:53	12:9:21	16:31:48
220	1/29	7:39:57	12:9:43	16:39:30
225	2/3	7:32:11	12:9:48	16:47:24
230	2/8	7:23:43	12:9:35	16:55:26
235	2/13	7:14:38	12:9:4	17:3:31
240	2/18	7:5:2	12:8:18	17:11:35
245	2/23	6:54:59	12:7:18	17:19:37
250	2/28	6:44:36	12:6:6	17:27:36
255	3/6	6:33:56	12:4:43	17:35:31
260	3/11	6:23:3	12:3:13	17:43:23
265	3/16	6:12:3	12:1:38	17:51:13
270	3/21	6:0:59	12:0:0	17:59:1
275	3/26	5:49:55	11:58:22	18:6:49
280	3/31	5:38:55	11:56:47	18:14:39
285	4/5	5:28:2	11:55:17	18:22:31
290	4/10	5:17:22	11:53:54	18:30:26
295	4/15	5:6:59	11:52:42	18:38:25
300	4/20	4:56:56	11:51:42	18:46:27
305	4/25	4:47:20	11:50:56	18:54:31
310	4/30	4:38:15	11:50:25	19:2:36
315	5/5	4:29:47	11:50:12	19:10:38
320	5/10	4:22:1	11:50:17	19:18:32
325	5/16	4:15:5	11:50:39	19:26:14
330	5/21	4:9:4	11:51:20	19:33:36
335	5/26	4:4:4	11:52:17	19:38:45
340	5/31	4:0:12	11:53:29	19:46:46
345	6/5	3:57:32	11:54:55	19:52:18
350	6/10	3:56:7	11:56:30	19:56:54
355	6/15	3:55:59	11:58:13	20:0:28

0.2　日

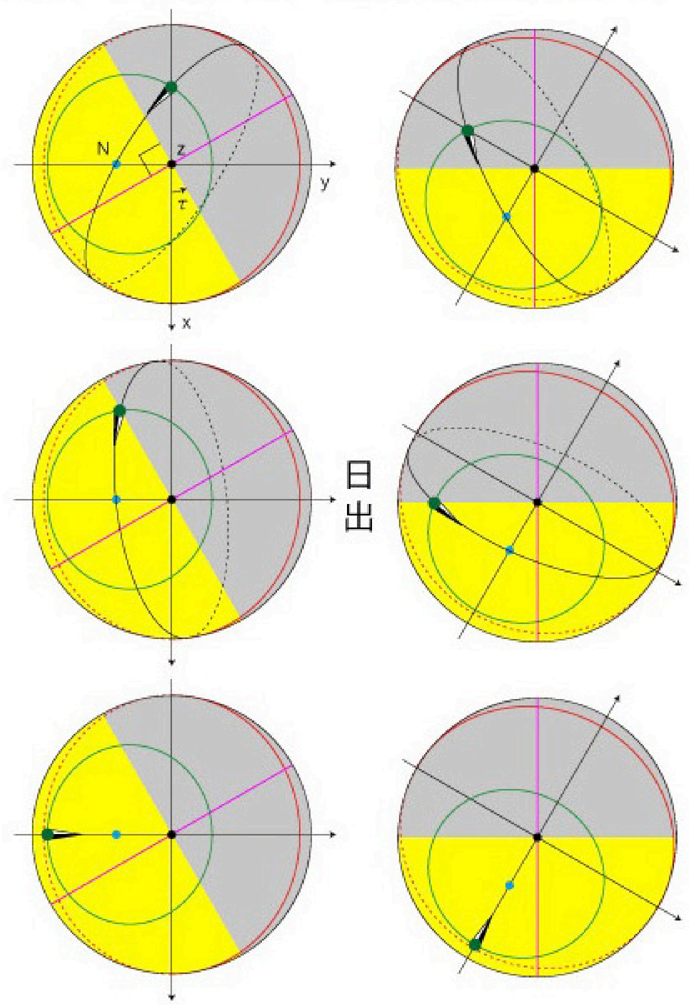
0.2.1　地上の１日——地球の自転

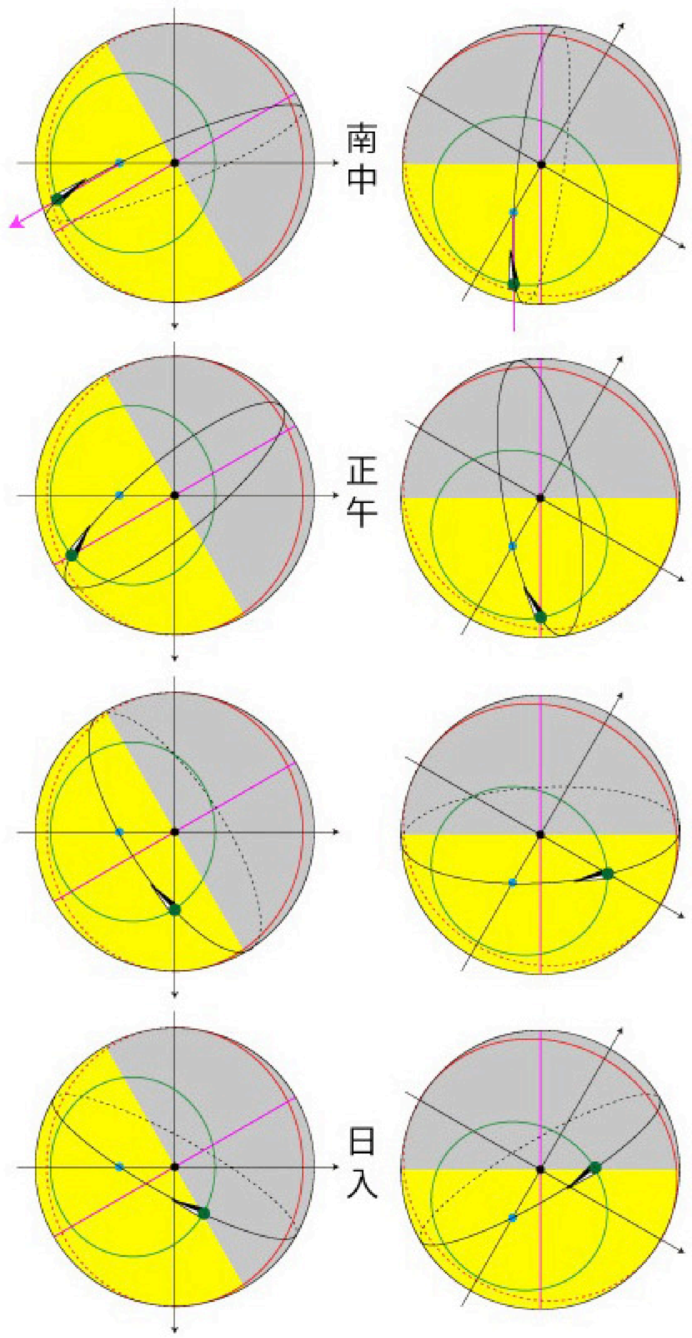
地球がつぎの位置にあるとする：



このときの地球の自転による一つの地点の移動は，つぎのようになる：

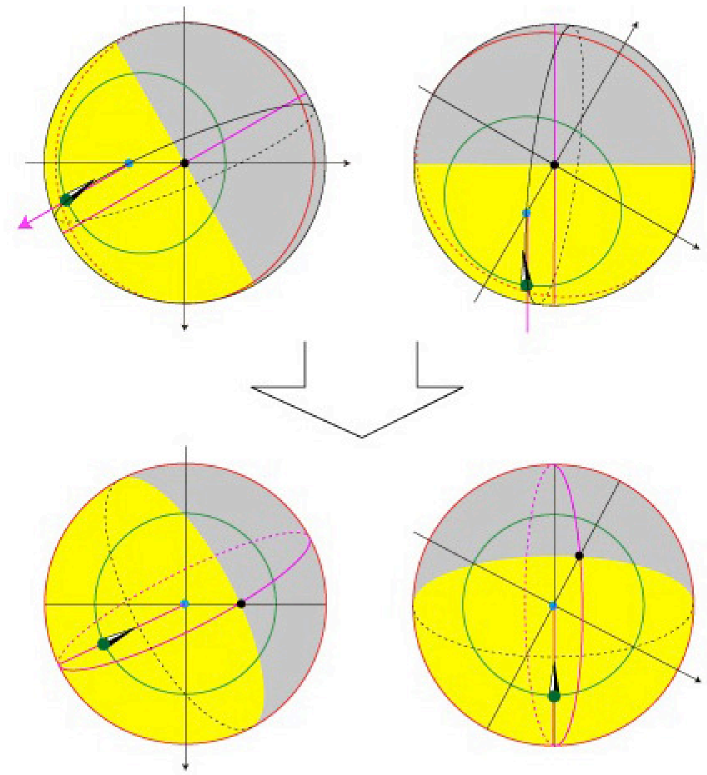
地点の北方向を磁針で示す
さらに，見やすいように，下方に太陽がある図を右に並べる





上の図は公転面を垂直に見るものであるが，これだと「南中」の特徴が表現されない。

「南中」の特徴が表現される図は，赤道面を垂直に見る図である：



年

理論

1　公理・定義

2　座標

公転軸系直交座標と

自転軸系極座標 (緯度経度)

3　公転軸系直交座標計算

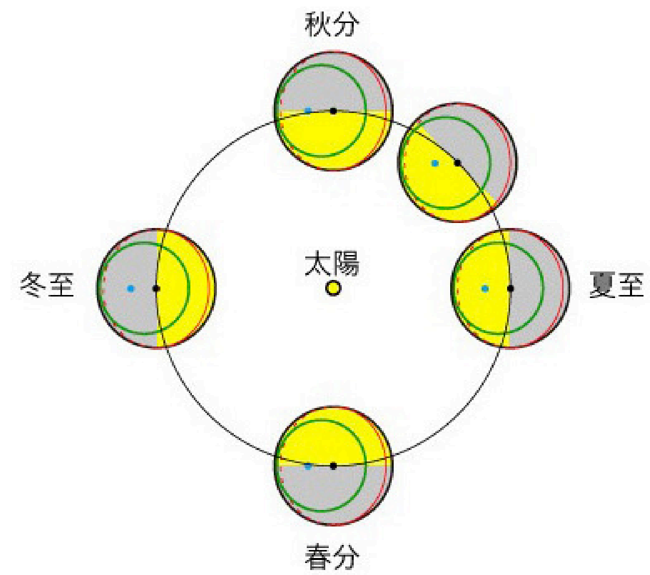
4　自転軸系極座標

5　例：秋分

1 公理・定義

1.1 公理 (計算モデル)

公転では，緯度 a の円における日の当たる部分の割合が，つぎのように変化する：

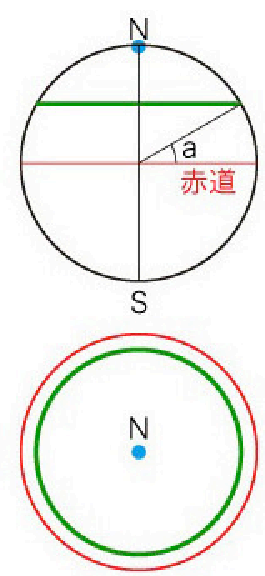


この変化を計算で求めることを，問題にする。

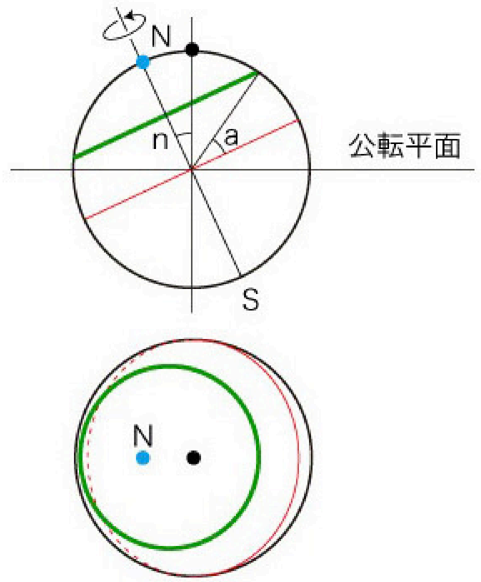
計算モデルとして，つぎの条件を立てる：

1. 地球は球体で，自転軸は中心を通る
2. 地球の中心と公転軌道と太陽は，１つの平面上にある
3. 公転軸に対する自転軸の傾きは，一定
4. 自転軸と公転軸が張る平面は，公転においてつねに平行
5. 自転角速度と公転角速度は一定

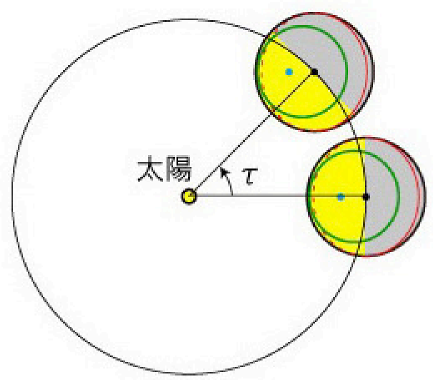
「緯度 a」は，つぎの図に示される角度 a である：



公転平面に対する地軸の傾きを，n とする：



公転角度を，夏至が 0 であるように定義する：



sin, cos を適用する角度の数値は，ラジアンを単位とした数値である。
ラジアンの意味を確認すべし：

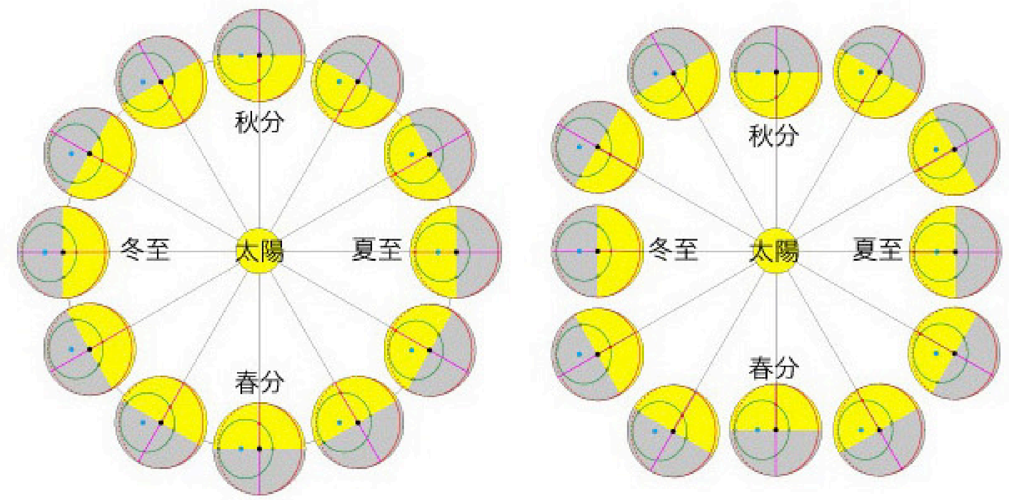
☞ 弧度法，角度の単位「ラジアン」

また，論述を簡単にするために，地球半径の数値を 1 にする。

「公転角速度一定」の条件について：

公転は実際には「面積速度一定」であるが，ここでは簡単のために「公転角速度一定」にする。
この条件には，つぎの含蓄がある：

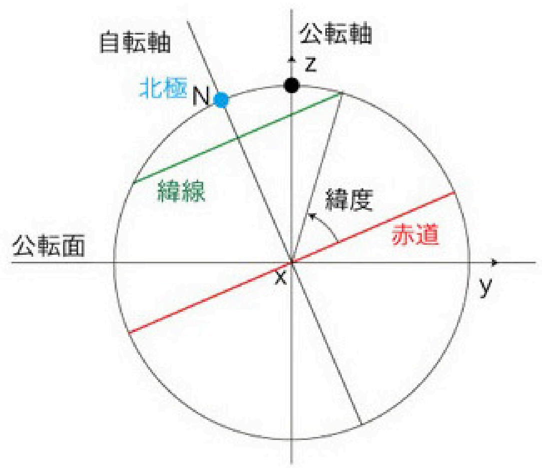
月日は，公転角度 τ にのみに依存する。
公転軌道の形——公転軌道が楕円であるとか——は，これに関係しない。



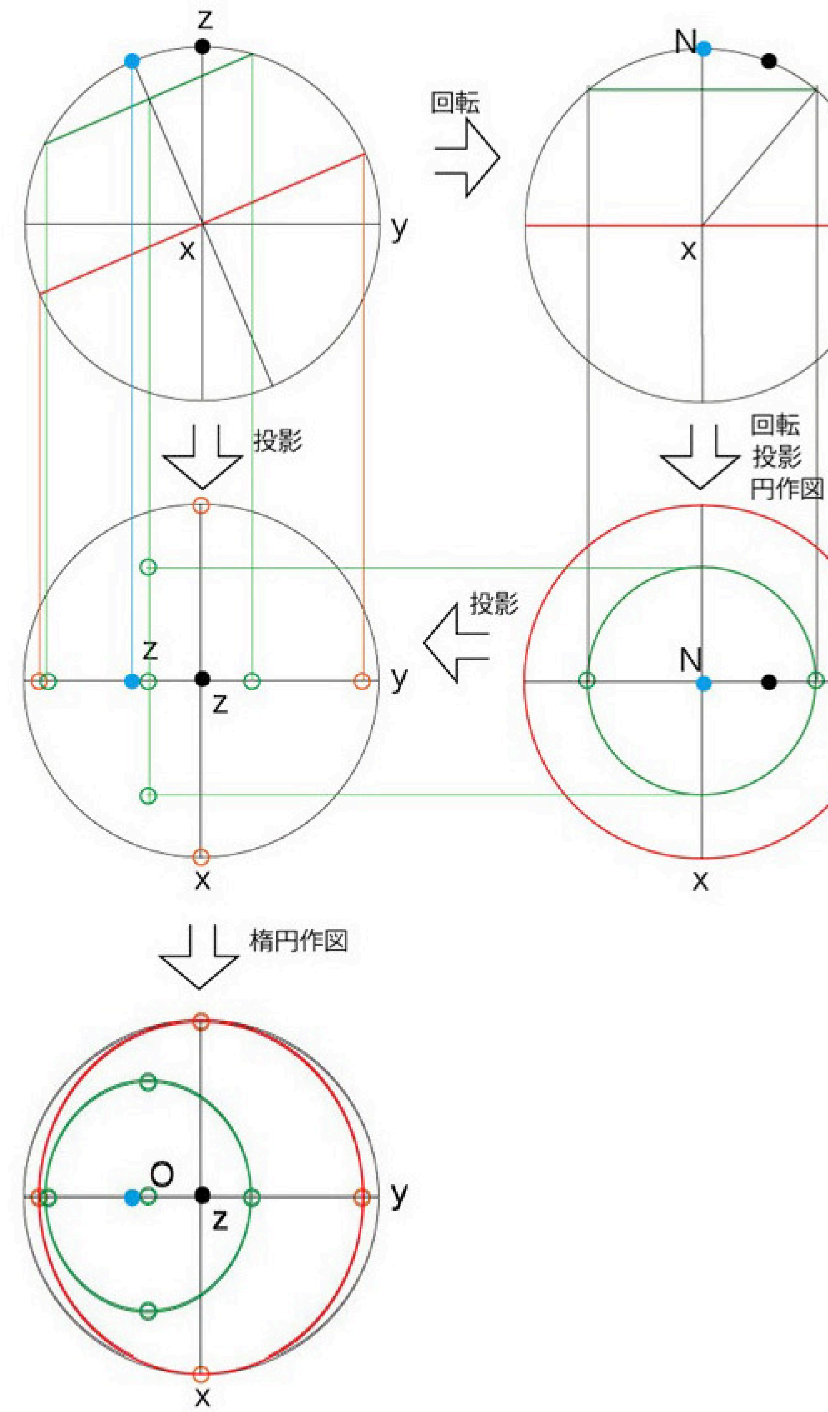
1.2　作図法

自転軸が傾いた地球に太陽光が照射している図を描くのは，けっこう頭がこんがらがる作業である。
ということで，作図法をはじめにやっておく。

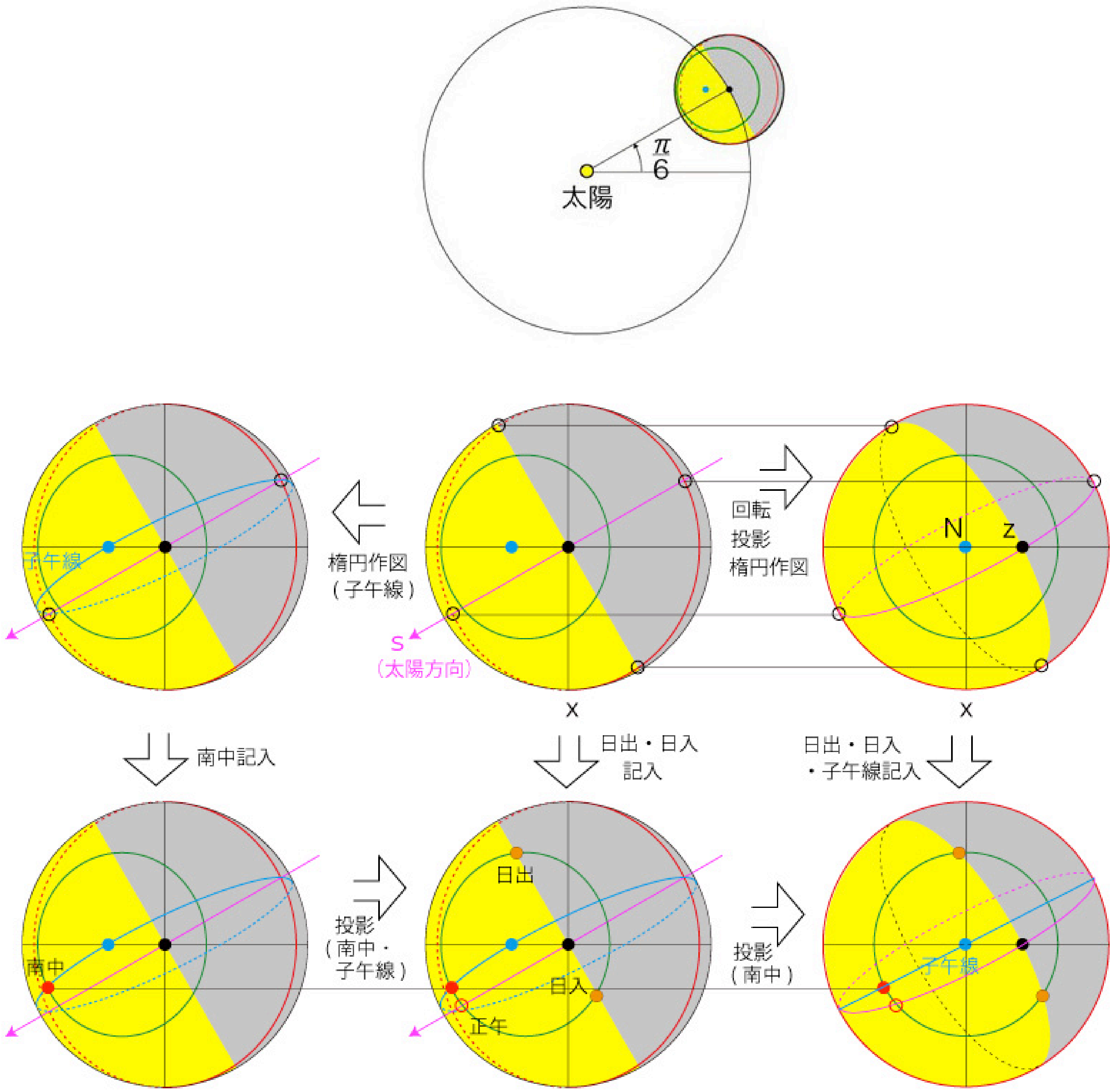
1. <公転軸と自転軸が張る面>を垂直な方向から見た図（「正面図」）



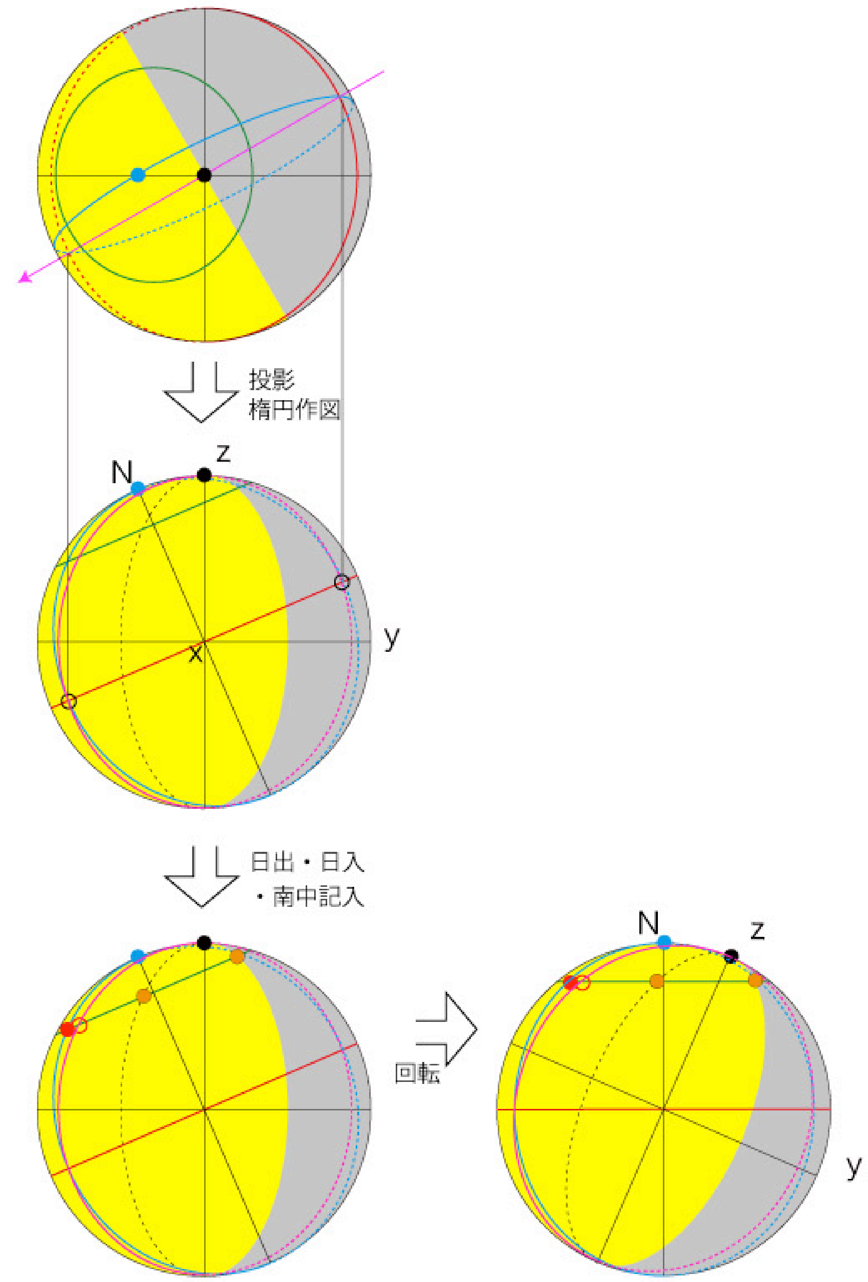
2. 緯線と赤道の作図



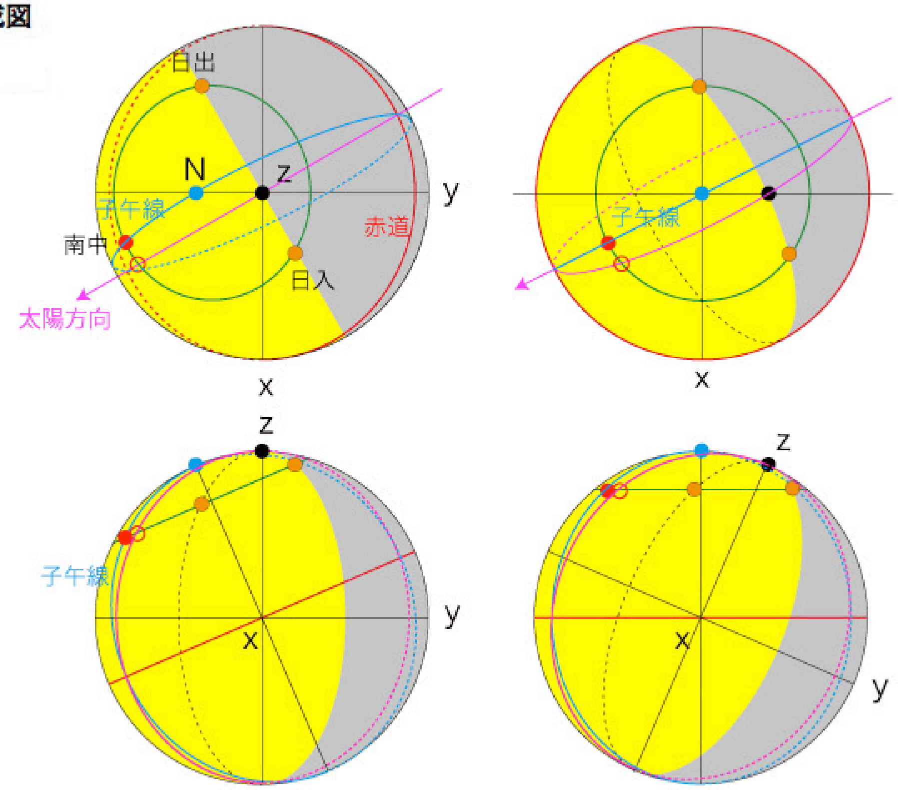
3. 日出・日入・正午・南中の作図



4. 上面図から正面図



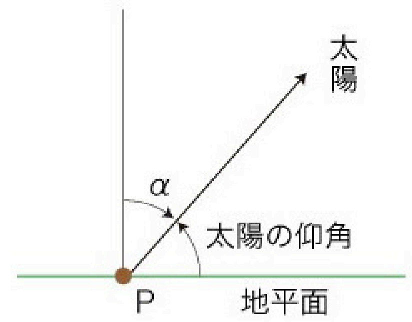
5. 完成図



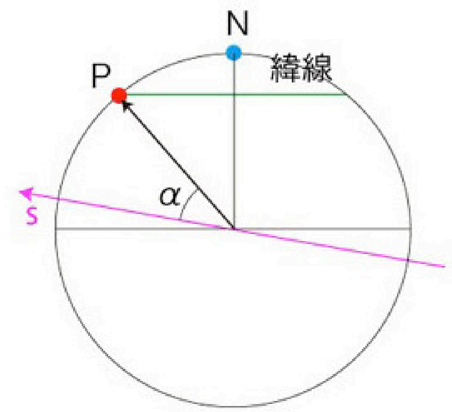
1.3　南中と正午

1.3.1　「南中」の意味

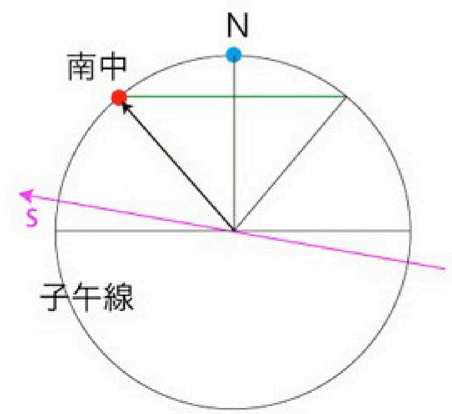
地表の点Ｐにおける太陽の高度は，つぎの角度αで表せる：



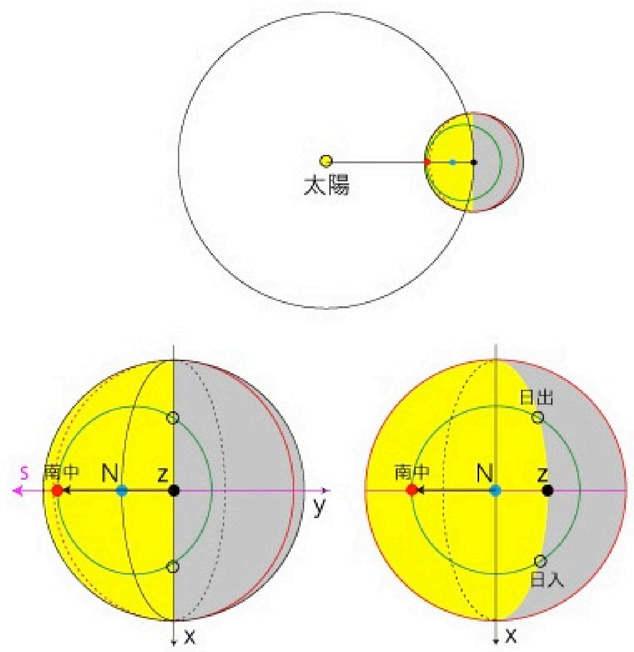
高度が最大になるのは，αが最小になるとき。
そしてそれは，Ｐがつぎの位置にあるとき：

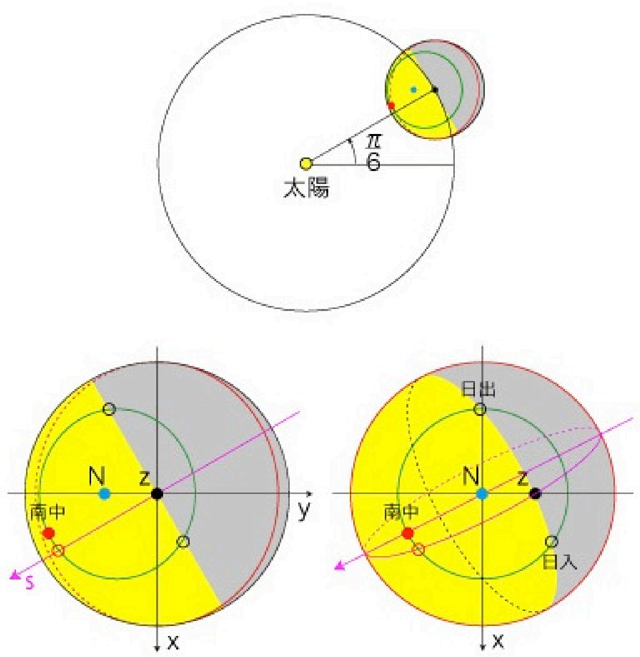


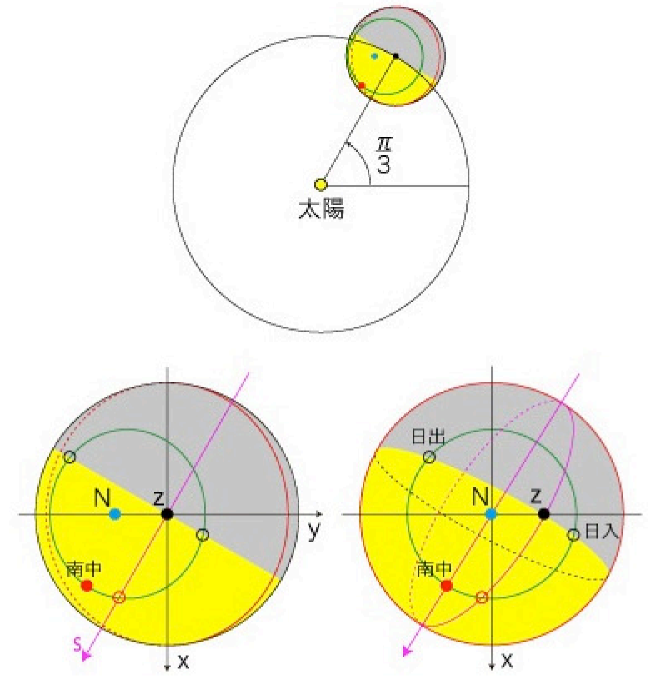
この位置を表現するのに，「南中」「子午線」のことばがある。
即ち，このとき「太陽が真南──真後ろが真北」なので，「南中」という。
そして，このときＰが乗っている経線を「Ｐの子午線」と呼ぶ。

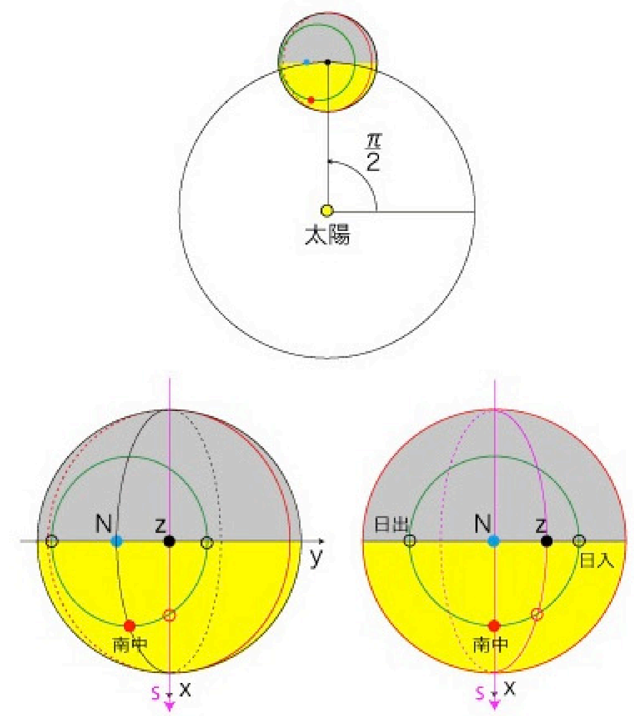


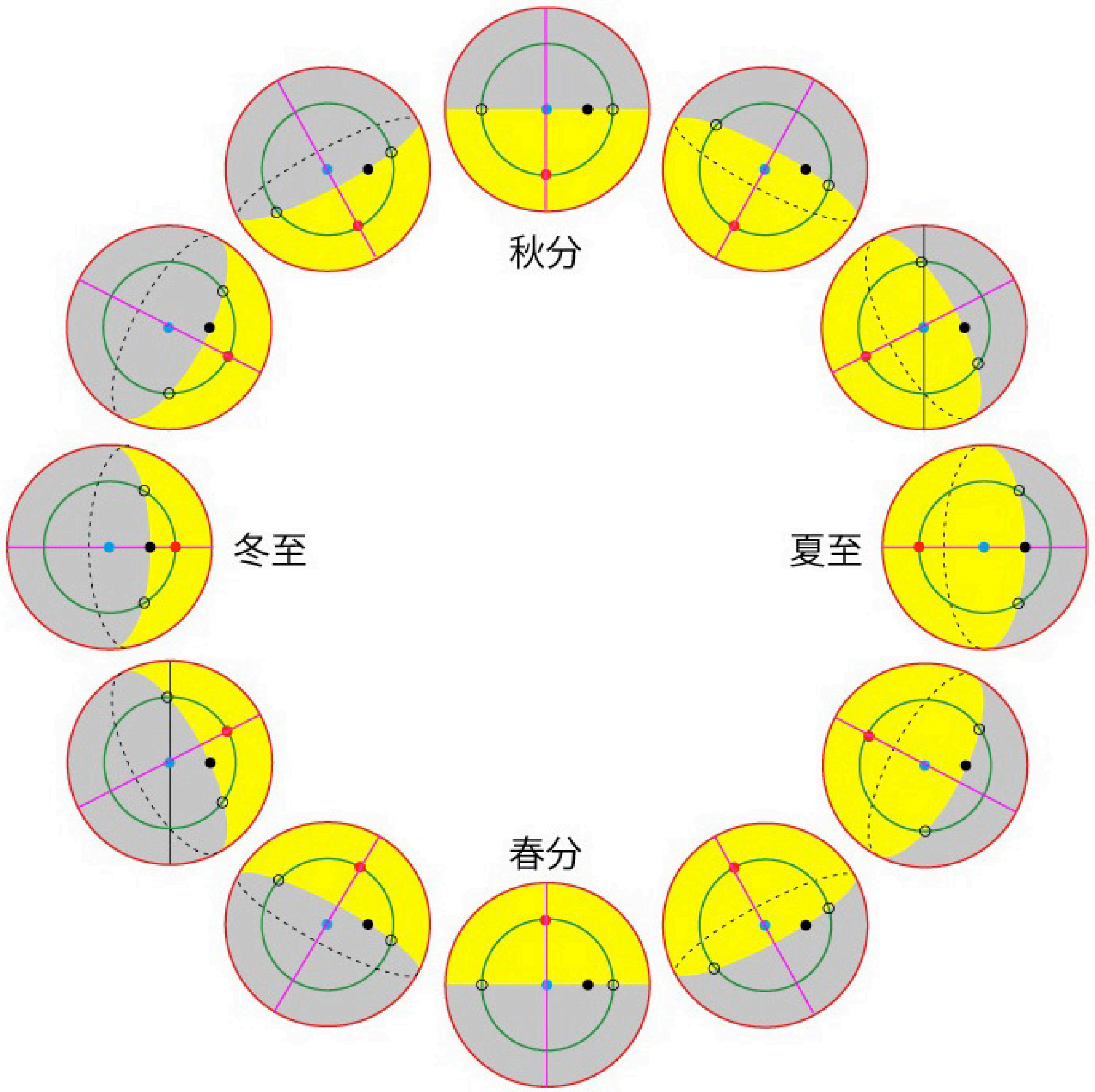
「南中」の位置の変化

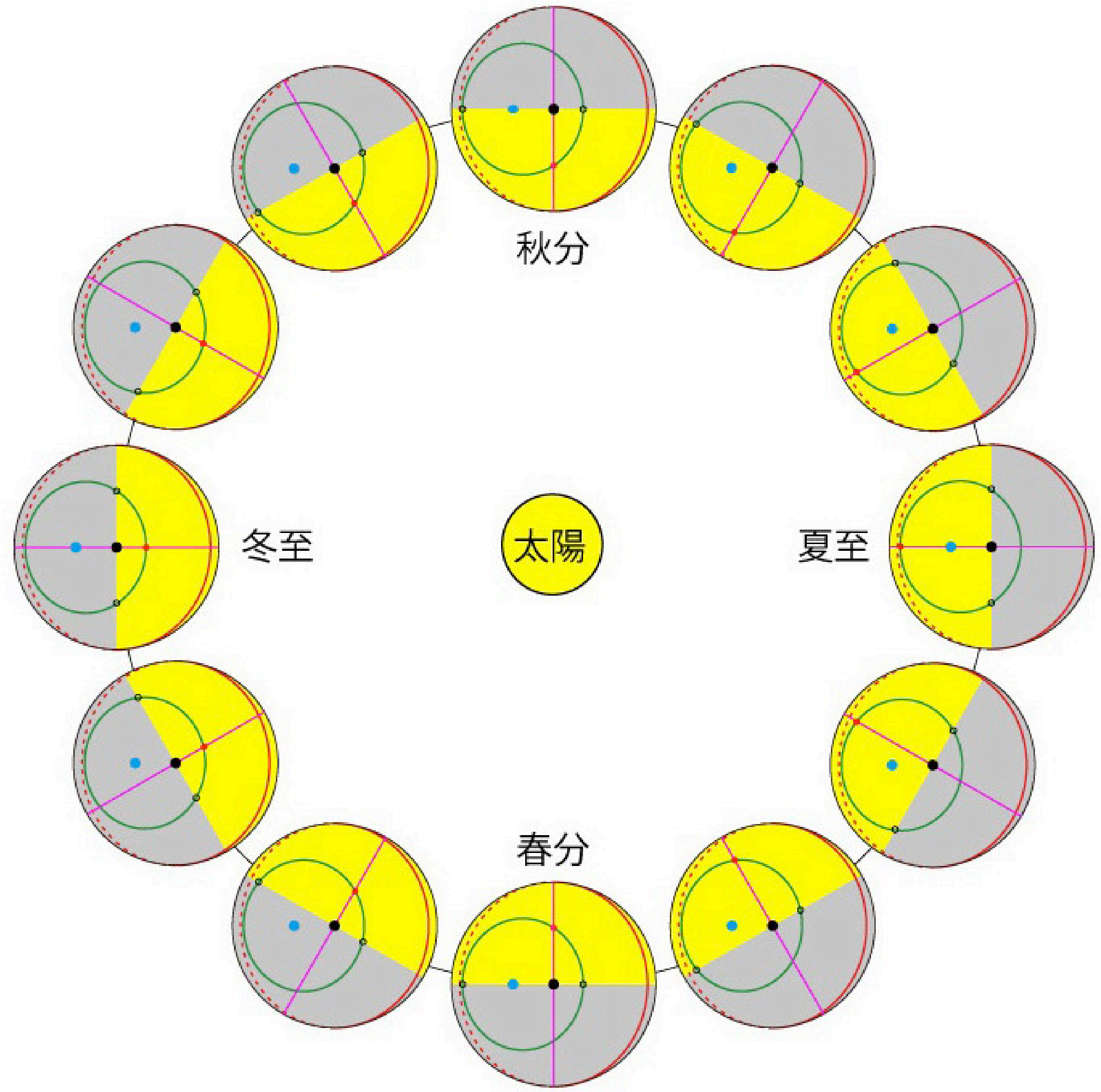

太陽
S
南中
N
z
y
x
日出
日入


π
6
太陽
N
z
y
南中
S
x
日出
日入


π
3
太陽
日出
N
z
y
日入
南中
S
x


π
2
太陽
日出
N
z
y
日入
南中
S
x


秋分
冬至
夏至
春分


秋分
冬至
太陽
夏至
春分

1.3.2 「正午」の意味

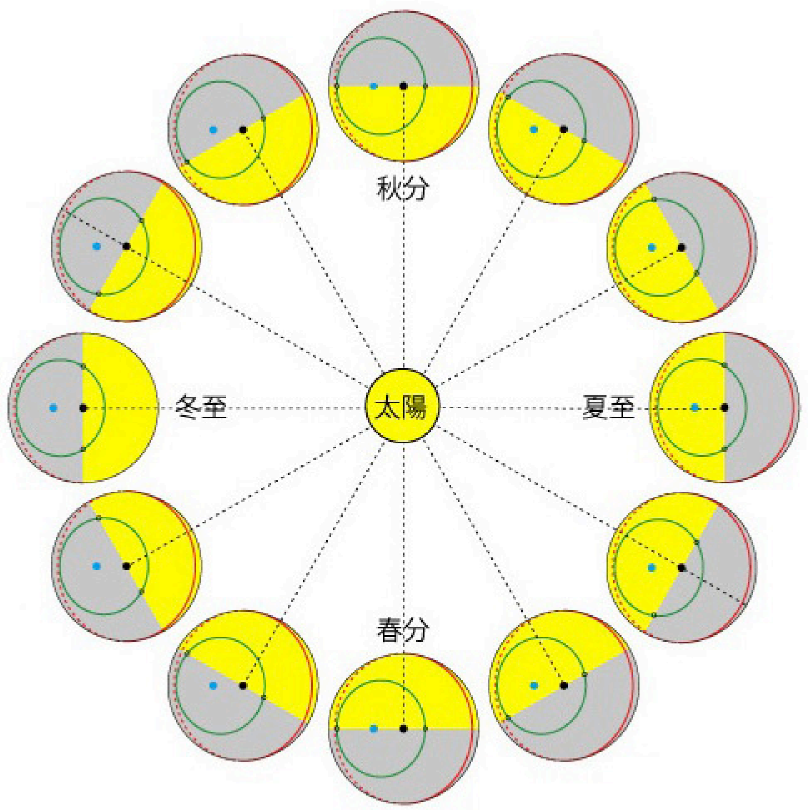
人は，真昼を１日の時刻の基準に定めている。
これは，人類の歴史の絡みでこうなったというものである。
真昼は，日出から日入までの時間を二等分する時点 (太陽がいちばん高くなる時点) であり，「南中」と呼んでいる。

ところが，南中からつぎの南中までの時間は日々変化する。
こうなるのは，地球の自転軸が公転面の垂直方向から傾いているためである。

よって，南中基準で時刻を定めたら「時計」が不可能になる。
人にとっては，「時計」を持てることの方が，基準が明示的であることよりも，ずっと大事である。
そこで人は，「時計」を持てるために，＜平均時＞を導入した。

＜平均時＞は，どのように定めるか？
これをここで説明する。

地球の自転軸と公転軸と太陽の位置関係で，夏至・秋分・冬至・春分がつぎのように定義される：



夏至・秋分・冬至・春分は，時点であることに注意せよ。
地球が夏至，秋分，冬至，春分になるのは，それぞれ一瞬である。

夏至に南中になる地点が，各緯度で１つ(だけ)存在する。
Ｐをこれらのうちの一つとする。

公転周期は，「年」と表現される。
話を簡単にするために，つぎのように条件設定する：

夏至から１年の間に，Ｐの＜南中からつぎの南中まで＞がピッタリ365回

註：実際は，365回プラス1/4回であり，そのために４年に１度閏年を定めているわけである。

さらに，つぎのように条件設定する：

1年 ＝ (１時間の24倍) の 365倍

そして，１時間の24倍を，「日」と呼ぶ。
こうして，１年は 365日である。

夏至から＜193日と12時間＞後の時点を起点にして，１年をつぎのように12の月で区分する：

１月は31日，2月は28日，……，12月は31日

註：＜193日と12時間＞の意味は，「夏至の日を6月20日としたとき，それから＜193日と12時間＞後が１月１日の零時」。

１日の始まりから12時間後を，「正午」と呼ぶ。

Ｐの役割は，つぎのものであった：
1. 年・日・月を条件づける
2. 夏至からの公転角度τに対し，各緯度で南中の地点と正午の地点がそれぞれただ一つ決まるようにする

Ｐはここでお役御免となる。

「南中の地点」「正午の地点」を，それぞれ短く「南中点」「正午点」ということにする。

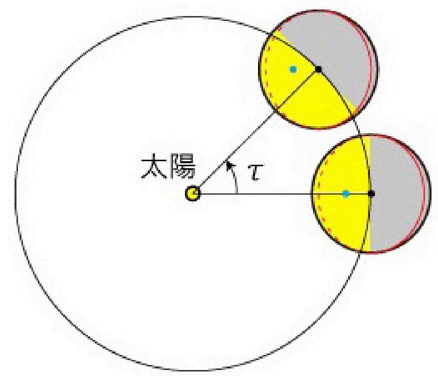
ここで押さえようとするのは，つぎのことである：

南中点と正午点は，夏至，秋分，夏至，冬至で一致する。
そのほかでは，一致しない。

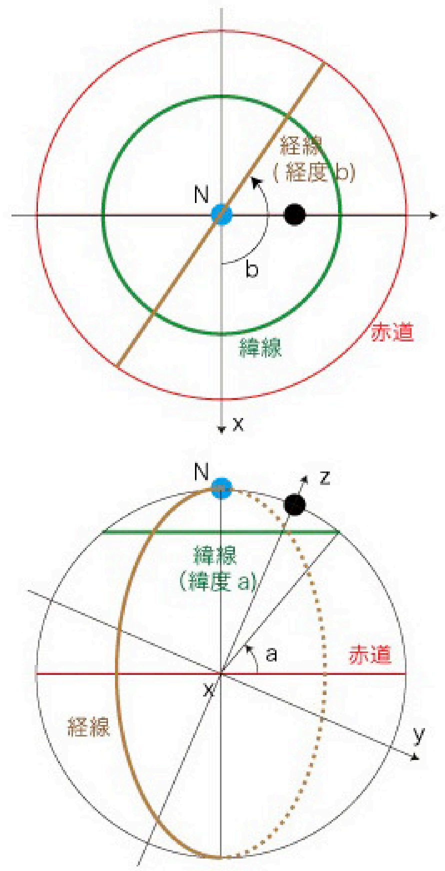
南中点と正午点の一致・不一致を論ずるためには，つぎの２つを定位する方法が要る：

- 公転する地球
- 自転する地球の上の地点

＜公転する地球＞の定位は，つぎのように公転角度を定める：



＜自転する地球の上の地点＞の定位は，つぎのように緯度・経度を定める：



以上のように設定したとき，〇月〇日の南中点と正午点は，つぎのようにして求まる：

- 〇月〇日正午を１月１日正午のｎ日後とする。
  このとき，〇月〇日正午は夏至から 194 ＋ ｎ 日後。
- 地球の１日の公転角度は，360/365 度。
  よって，〇月〇日の正午の地球の公転角度は，360/365 × (194 ＋ n) 度
- この公転角度に対する南中点の経度が，計算で求まる。
  ☞ 南中の経度計算式

- 正午点は１年の間に，自転軸の周りを 365回転プラス１回転する。
  プラス１回転は，公転角度のプラス１度に対し正午点経度がプラス１度である。

  〇月〇日の正午の地球の公転角度は，360/365 × (194 ＋ n) 度。
  よって，〇月〇日の正午点の経度は 360/365 × (194 ＋ n) ＋ 270 (mod 360)。

実際に計算すると，つぎのようになる：

北緯50° の場合

公転角度(τ)	月/日	経度		南中は正午に対し
		南中	正午	
0	6/20	270	270	一致
5	6/25	275.4	275	1分47秒後
10	6/30	280.9	280	3分30秒後
15	7/5	286.3	285	5分6秒後
20	7/10	291.6	290	6分32秒後
25	7/15	296.9	295	7分44秒後
30	7/20	302.2	300	8分42秒後
35	7/25	307.3	305	9分22秒後
40	7/31	312.4	310	9分45秒後
45	8/5	317.5	315	9分49秒後
50	8/10	322.4	320	9分36秒後
55	8/15	327.3	325	9分6秒後
60	8/20	332.1	330	8分20秒後
65	8/25	336.8	335	7分19秒後
70	8/30	341.5	340	6分7秒後
75	9/4	346.2	345	4分44秒後
80	9/9	350.8	350	3分14秒後
85	9/14	355.4	355	1分38秒後
90	9/19	0	0	一致
95	9/24	4.6	5	1分38秒前
100	9/29	9.2	10	3分14秒前
105	10/4	13.8	15	4分44秒前
110	10/10	18.5	20	6分7秒前
115	10/15	23.2	25	7分19秒前
120	10/20	27.9	30	8分20秒前
125	10/25	32.7	35	9分6秒前
130	10/30	37.6	40	9分36秒前
135	11/4	42.5	45	9分49秒前
140	11/9	47.6	50	9分45秒前
145	11/14	52.7	55	9分22秒前

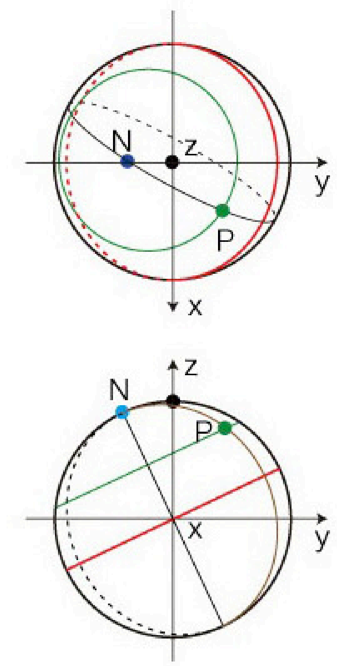
150	11/19	57.8	60	8分42秒前
155	11/24	63.1	65	7分44秒前
160	11/29	68.4	70	6分32秒前
165	12/4	73.7	75	5分6秒前
170	12/9	79.1	80	3分30秒前
175	12/14	84.6	85	1分47秒前
180	12/20	90	90	一致
185	12/25	95.4	95	1分47秒後
190	12/30	100.9	100	3分30秒後
195	1/4	106.3	105	5分6秒後
200	1/9	111.6	110	6分32秒後
205	1/14	116.9	115	7分44秒後
210	1/19	122.2	120	8分42秒後
215	1/24	127.3	125	9分22秒後
220	1/29	132.4	130	9分45秒後
225	2/3	137.5	135	9分49秒後
230	2/8	142.4	140	9分36秒後
235	2/13	147.3	145	9分6秒後
240	2/18	152.1	150	8分20秒後
245	2/23	156.8	155	7分19秒後
250	2/28	161.5	160	6分7秒後
255	3/6	166.2	165	4分44秒後
260	3/11	170.8	170	3分14秒後
265	3/16	175.4	175	1分38秒後
270	3/21	180	180	一致
275	3/26	184.6	185	1分38秒前
280	3/31	189.2	190	3分14秒前
285	4/5	193.8	195	4分44秒前
290	4/10	198.5	200	6分7秒前
295	4/15	203.2	205	7分19秒前
300	4/20	207.9	210	8分20秒前
305	4/25	212.7	215	9分6秒前
310	4/30	217.6	220	9分36秒前
315	5/5	222.5	225	9分49秒前
320	5/10	227.6	230	9分45秒前
325	5/16	232.7	235	9分22秒前
330	5/21	237.8	240	8分42秒前
335	5/26	243.1	245	7分44秒前
340	5/31	248.4	250	6分32秒前
345	6/5	253.7	255	5分6秒前
350	6/10	259.1	260	3分30秒前
355	6/15	264.6	265	1分47秒前

2　座標

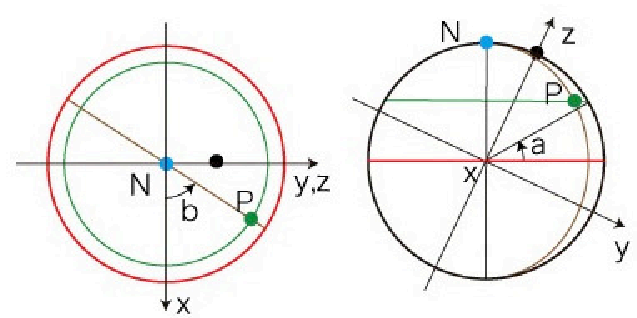
公転軸系直交座標と自転軸系極座標 (緯度経度)

2.1　公転軸系直交座標と自転軸系極座標の変換式

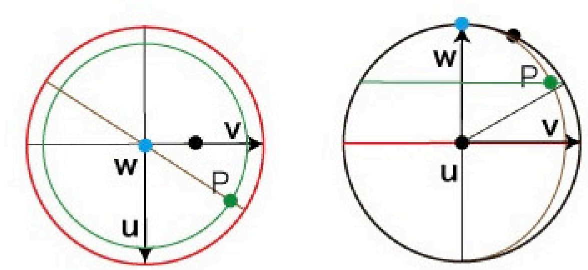
問題
公転軸系直交座標が (x , y, z) の地点Ｐの自転軸系経度緯度は？



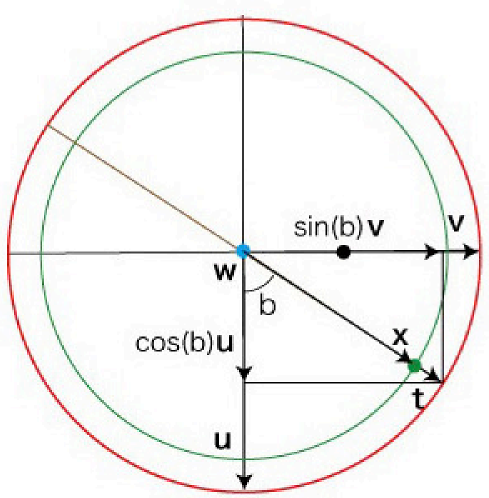
Ｐの緯度，経度を，それぞれａ，ｂとする：

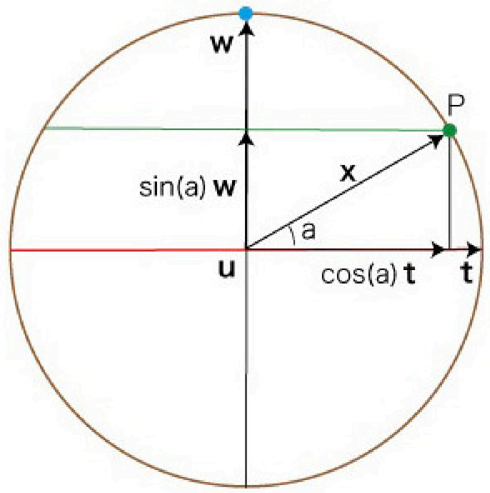


ベクトル**u**，**v**，**w** を，つぎのようにとる：



P の位置ベクトルを $\mathbf{x}$ とするとき，





$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= cos(a)\mathbf{t} + sin(a)\mathbf{w} \\
&= cos(a)(cos(b)\mathbf{u} + sin(b)\mathbf{v}) + sin(a)\mathbf{w} \\
&= cos(a)cos(b)\mathbf{u} + cos(a)sin(b)\mathbf{v} + sin(a)\mathbf{w}
\end{aligned}
$$

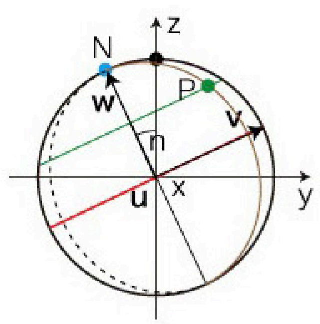
このベクトルの方程式を，座標の方程式に書き換える。

以下，つぎの略記を用いる：

$$
\begin{aligned}
n_s &= sin(n), \quad n_c = cos(n) \\
a_s &= sin(a), \quad a_c = cos(a) \\
b_s &= sin(b), \quad b_c = cos(b)
\end{aligned}
$$

$\mathbf{u}$，$\mathbf{v}$，$\mathbf{w}$ の座標は：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} &= (1, 0, 0) \\
\mathbf{v} &= (0, cos(n), sin(n)) \\
\mathbf{w} &= (0, -sin(n), cos(n))
\end{aligned}
$$



よって，

$$
\begin{aligned}
(x, y, z) &= a_c b_c (1, 0, 0) + a_c b_s (0, n_c, n_s) + a_s (0, -n_s, n_c) \\
&= (a_c b_c, 0, 0) + (0, a_c b_s n_c, a_c b_s n_s) + (0, -a_s n_s, a_s n_c) \\
&= (a_c b_c,\ a_c b_s n_c - a_s n_s,\ a_c b_s n_s + a_s n_c)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \ x &= a_c b_c \\
y &= n_c a_c b_s - n_s a_s \\
z &= n_s a_c b_s + n_c a_s
\end{aligned}
$$

この式から，逆に a，b を x, y, z で表す。

$x = a_c b_c,\ y = n_c a_c b_s - n_s a_s$ に

$$
\begin{aligned}
a_c &= \sqrt{1 - (a_s)^2} \\
b_c &= \pm\sqrt{1 - (b_s)^2}
\end{aligned}
$$

を代入：

$$
\begin{aligned}
x &= \pm\sqrt{1 - (a_s)^2}\sqrt{1 - (b_s)^2} \\
y &= n_c \sqrt{1 - (a_s)^2}\, b_s - n_s a_s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \ & x^2 = (1 - (a_s)^2)(1 - (b_s)^2) \\
& (y + n_s a_s)^2 = (n_c)^2 (1 - (a_s)^2)(b_s)^2
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \ (b_s)^2 = 1 - \frac{x^2}{1 - (a_s)^2} = \frac{(y + n_s a_s)^2}{(n_c)^2 (1 - (a_s)^2)}
$$

これを，a_s の方程式として解く：

$$
\Longrightarrow \ (n_c)^2 (1 - (a_s)^2) - (n_c)^2 x^2 = (y + n_s a_s)^2
$$

$$
\Longrightarrow \ -(n_c)^2\ (a_s)^2 + (n_c)^2 (1 - x^2) = y^2 + 2 n_s y a_s + (n_s a_s)^2
$$

$$
\Longrightarrow \ ((n_s)^2 + (n_c)^2)(a_s)^2 + 2\, n_s\, y\, a_s - (n_c)^2 (1 - x^2) + y^2 = 0
$$

$$
\Longrightarrow \ (a_s)^2 + 2\, n_s\, y\, a_s - (n_c)^2 (1 - x^2) + y^2 = 0
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \ a_s &= -n_s\, y \pm \sqrt{(n_s\, y)^2 + (n_c)^2 (1 - x^2) - y^2} \\
&= -n_s\, y \pm \sqrt{(n_c)^2 (1 - x^2 - y^2)} \\
&= -n_s\, y \pm n_c\, z
\end{aligned}
$$

$-n_s\, y \pm n_c\, z$ に

$$y = n_c a_c b_s - n_s a_s$$
$$z = n_s a_c b_s + n_c a_s$$

を代入すると

$$\begin{aligned} & -n_s\, y \pm n_c\, z \\ &\quad = -n_s(n_c a_c b_s - n_s a_s) \pm n_c(n_s a_c b_s + n_c a_s) \\ &\quad = -n_s n_c a_c b_s + (n_s)^2 a_s) \pm (n_s n_c a_c b_s + (n_c)^2 a_s) \end{aligned}$$

これが a_s と等しくなるのは，「±」が「+」の場合。
よって，

$$a_s = -n_s\, y + n_c\, z$$

さらに

$$\begin{aligned} b_c &= \frac{x}{a_c} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-(a_s)^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-(-n_s\, y + n_c\, z)^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-((n_s)^2 y^2 - 2n_s n_c yz + (n_c)^2 z^2)}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-(n_s)^2 y^2 + 2n_s n_c yz - (n_c)^2 z^2}} \end{aligned}$$

まとめ

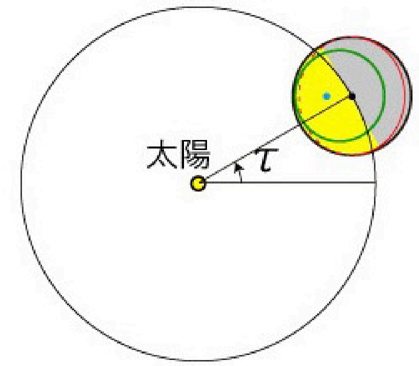
$$x = a_c b_c$$
$$y = n_c a_c b_s - n_s a_s$$
$$z = n_s a_c b_s + n_c a_s$$

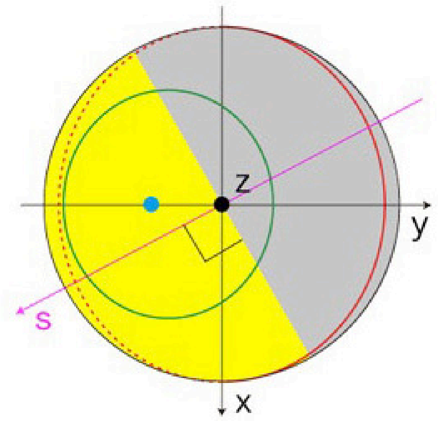
$$n_s\, y - n_c\, z + a_s = 0$$

$$a_s = -n_s\, y + n_c\, z$$
$$b_c = \frac{x}{\sqrt{1-(n_s)^2 y^2 + 2n_s n_c yz - (n_c)^2 z^2}}$$

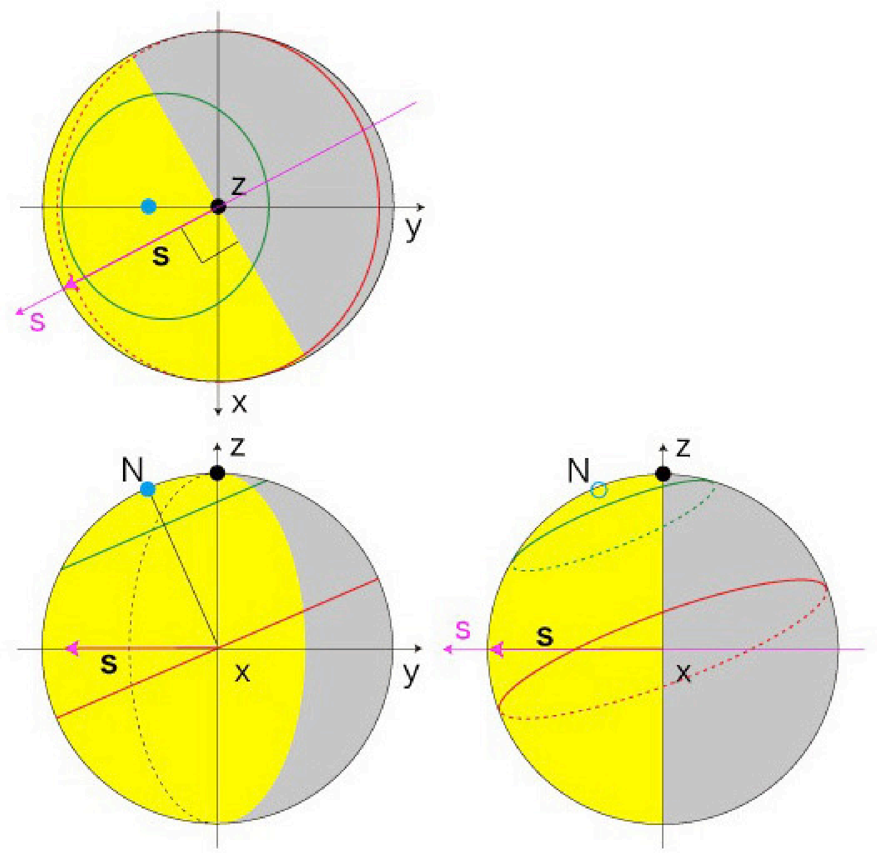
2.2　太陽の方向

地球の中心を通り太陽に向く軸を，ｓ軸とする。
ｓ軸は，公転角度 τ によって変わる：



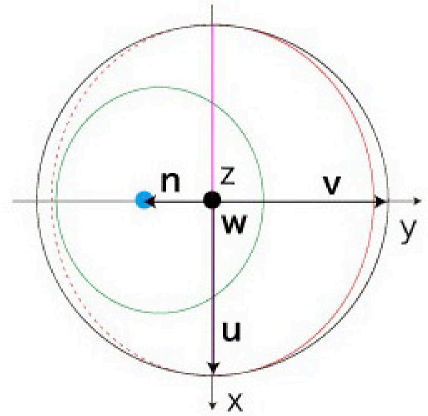


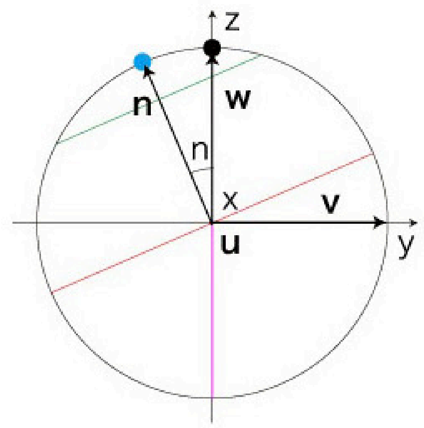
「太陽方向ベクトル **s**」を，つぎのようにとる：



$\mathbf{s}$ の座標を求める。

ベクトル $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{n}$ をつぎのようにとる：

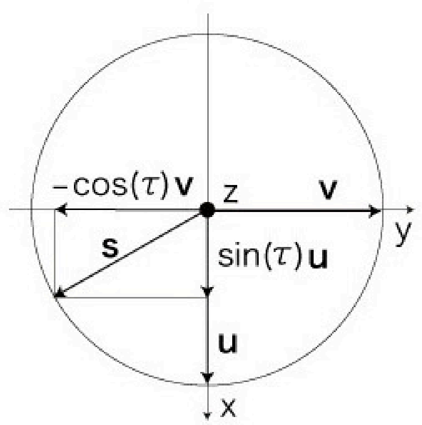


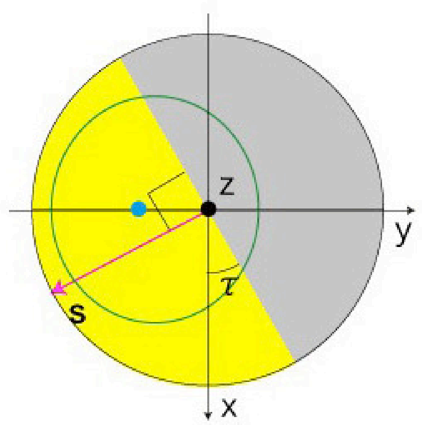


$$
\begin{aligned}
\mathbf{n} &= -n_s\ \mathbf{v} + n_c\ \mathbf{w} \\
&= -n_s\ (0, 1, 0) + n_c\ (0, 0, 1) \\
&= (0, -n_s, n_c)
\end{aligned}
$$

このとき

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s} &= \tau_s\ \mathbf{u} - \tau_c\ \mathbf{v} \\
&= \tau_s\ (1, 0, 0) - \tau_c\ (0, 1, 0) \\
&= (\tau_s, -\tau_c, 0)
\end{aligned}
$$





まとめ
太陽方向ベクトル：

$$
\mathbf{s} = (\tau_s, -\tau_c, 0)
$$

2.3　自分中心座標

空に見える太陽を定位したい。
これは，＜太陽の方向＞の定位である。
どう定位する？
主題は，「表現枠」である。

枠は，(2) 原点の自分と，(2) 自分の立つ地平面と，(3) 自分が端点の地平面上の半直線を基準線として固定したもの，である。

太陽を地平面へ垂直に投影し，自分とこの投影点をつなぐ直線が基準線となす角度を求める。
これは，太陽の天球経度を求めていることになる。

自分が立つ地平面からの太陽の仰角度を求める。
これは，太陽の天球緯度を求めていることになる。

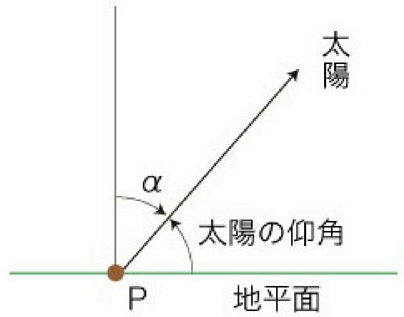
この二つで，自分に対する太陽の位置を表現できたことになる。
経度と緯度で定位するこの方法は，「極座標」である。

3　公転軸系直交座標計算

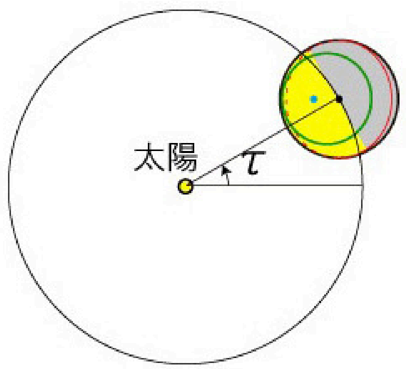
3.1　太陽の定位

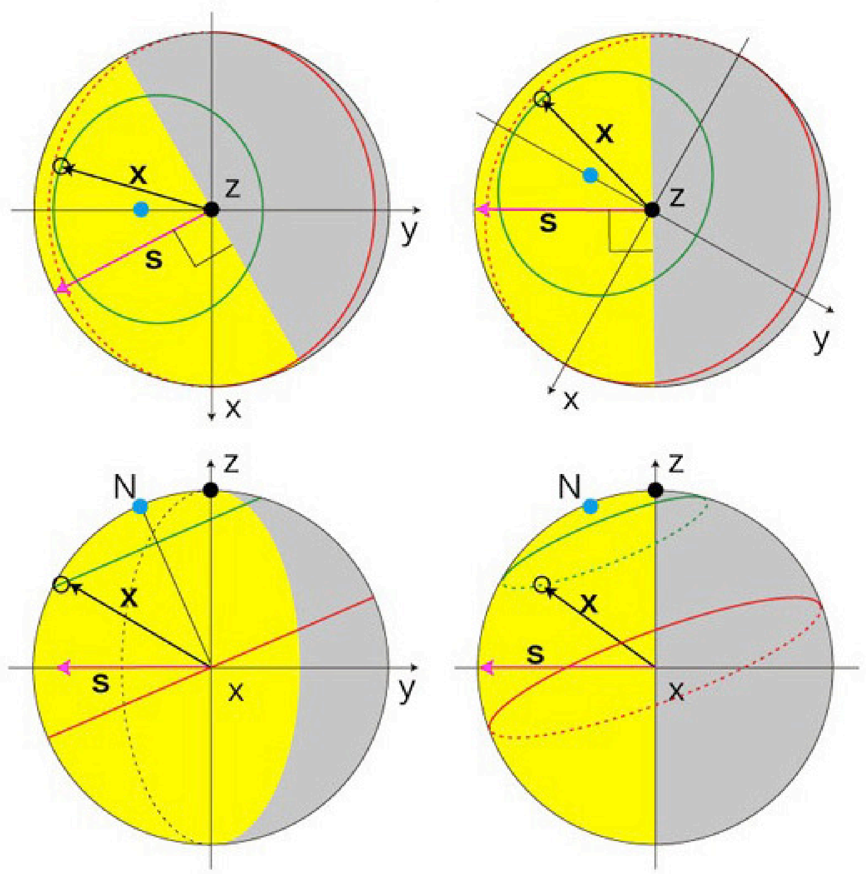
3.1.1　太陽の高度

点Ｐにおける太陽の高度は，つぎの角度αで表せる：



Ｐのいまの座標の位置ベクトル $\mathbf{x}$ を考える。





太陽の方向はベクトル $\mathbf{s}$ が指している。
$\mathbf{x}$ は，Ｐにおける地平面の法線ベクトル。
よって，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{s}$ がつくる角が，αになる。

したがって，

$$\begin{aligned} cos(\alpha) &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{s} \\ &= (x, y, z) \cdot (\tau_s, -\tau_c, 0) \\ &= \tau_s\, x - \tau_c\, y \end{aligned}$$

そして，

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

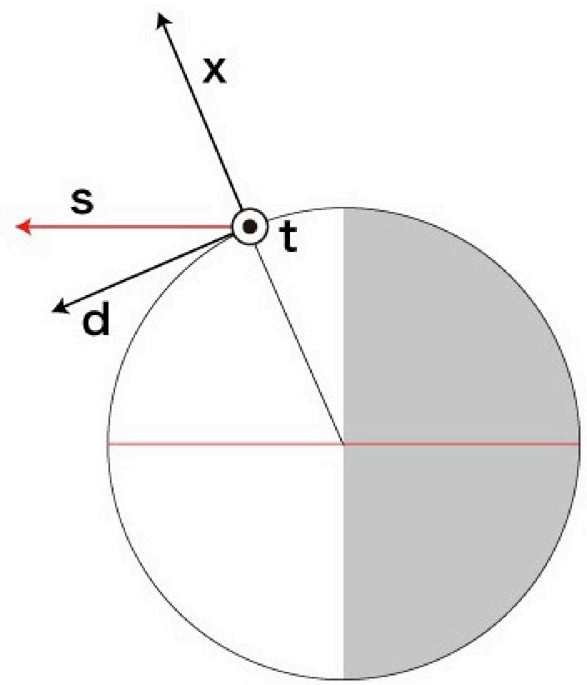
がＰにおける太陽高度 (仰角) になる。

3.1.2　太陽の方角

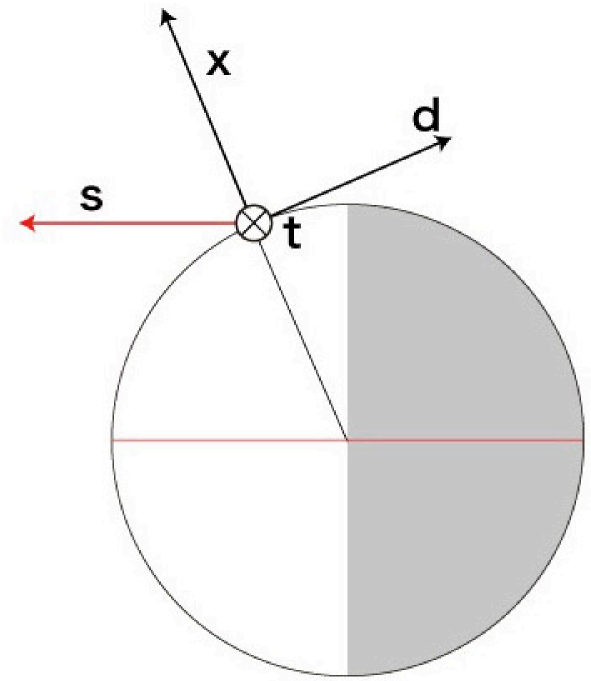
地上の点Ｐから見た太陽の方角を，求めたい。
Ｐの緯度ａとし，いまの位置ベクトルを $\mathbf{x}$ とする。
太陽の方角は，太陽方向ベクトル $\mathbf{s}$ を地平面に下ろしたベクトルで表す。

「地平面に下ろす」を述べるには，数学が要る。 ──数学をやっていないと，言い方に困る。
これは，つぎのように述べられる：

　$\mathbf{x}$ と $\mathbf{s}$ が張るを平面を $S_{\mathbf{xs}}$ とする。
　Ｐを足とし $S_{\mathbf{xs}}$ と垂直なベクトル $\mathbf{t}$ をとる。
　$\mathbf{t}$ と $\mathbf{x}$ が張るを平面を $S_{\mathbf{tx}}$ とする。
　Ｐを足とし $S_{\mathbf{tx}}$ と垂直なベクトル $\mathbf{d}$ をとる。
　$\mathbf{d}$ が，「太陽の方角」ベクトルになる。



ただし，この述べ方はまだ不十分である。
太陽を前に見る向きと背後にする向きの２通りになるからである。



太陽を前に見るようにするには，つぎのように述べればよい：

　$S_{\mathbf{xs}}$ 上で，Ｐを足にして，2∠R より小さい回転で $\mathbf{x}$ を $\mathbf{s}$ に重ねることを考える。
　この回転で右ネジが進む方向を $\mathbf{t}$ の向きにする。
　$S_{\mathbf{tx}}$ 上で，Ｐを足にして，2∠R より小さい回転で $\mathbf{t}$ を $\mathbf{x}$ に重ねることを考える。
　この回転で右ネジが進む方向を $\mathbf{d}$ の向きにする。

しかし，絵はわかるにしても，言い回しが面倒である。
数学は，この言い回しを簡単にする用語を用意している。
「ベクトルの外積」である。
この用語を用いると，$\mathbf{d}$ の導入はつぎのように述べられる：

　$\mathbf{x}$ と $\mathbf{s}$ の外積 $\mathbf{x} \times \mathbf{s}$ を，$\mathbf{t}$ とする。
　$\mathbf{t}$ と $\mathbf{x}$ の外積 $\mathbf{t} \times \mathbf{x}$ を，$\mathbf{d}$ とする。

「外積」は高校数学には出て来ないが，高校物理の「フレミングの右手の法則」は「右ネジの法則」であり，「外積」をやっているわけである。
外積は，ベクトルの成分で表すとつぎのようになる：

$$
\begin{aligned}
&(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) \\
&\quad = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)
\end{aligned}
$$

こうして，「太陽の方角」ベクトル $\mathbf{d}$ がつぎの計算で求まる：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d} &= (\mathbf{x} \times \mathbf{s}) \times \mathbf{x} \\
&= (((x, y, z) \times (\tau_s, -\tau_c, 0)) \times (x, y, z) \\
&= (y0 - z(-\tau_c),\ z\tau_s - x0,\ x(-\tau_c) - y\tau_s) \times (x, y, z) \\
&= (\tau_c z,\ \tau_s z,\ -\tau_c x - \tau_s y) \times (x, y, z) \\
&= (\tau_s zz - (-\tau_c x - \tau_s y)y,\ (-\tau_c x - \tau_s y)x - \tau_c zz,\ \tau_c zy - \tau_s zx) \\
&= (\tau_s(y^2 + z^2) + \tau_c(xy),\ -\tau_s(xy) - \tau_c(z^2 + x^2),\ -\tau_s(zx) + \tau_c(yz))
\end{aligned}
$$

そして $\mathbf{d}$ の大きさは，$\mathbf{x} \cdot \mathbf{s} = cos(\alpha)$ の α に対し，

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{t}| &= |\mathbf{x}||\mathbf{s}|\ sin(\alpha) = sin(\alpha) \\
|\mathbf{d}| &= |\mathbf{t}||\mathbf{x}|\ sin(\pi/2) = sin(\alpha)
\end{aligned}
$$

「太陽の高度」で

$$cos(\alpha) = \tau_s\ x - \tau_c\ y$$

を得ているので，これより

$$sin(\alpha) = \sqrt{1 - (cos(\alpha))^2} = \sqrt{1 - (\tau_s\ x - \tau_c\ y)^2}$$

まとめ
公転角度 τ のときの，座標 (x, y, z) での太陽方角ベクトル：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d} = (\ &\tau_s(y^2 + z^2) + \tau_c(xy), \\
&-\tau_s(xy) - \tau_c(z^2 + x^2), \\
&-\tau_s(zx) + \tau_c(yz))
\end{aligned}
$$

$$|\mathbf{d}| = \sqrt{1 - (\tau_s\ x - \tau_c\ y)^2}$$

3.2　南中

3.2.1　南中の座標

問題

公転角が τ のときの，緯度 a の南中の座標 (x, y, z) は？

簡単のため

$$n_s = sin(n),\ \ n_c = cos(n)$$
$$a_s = sin(a),\ \ a_c = cos(a)$$
$$\tau_s = sin(\tau),\ \ \tau_c = cos(\tau)$$

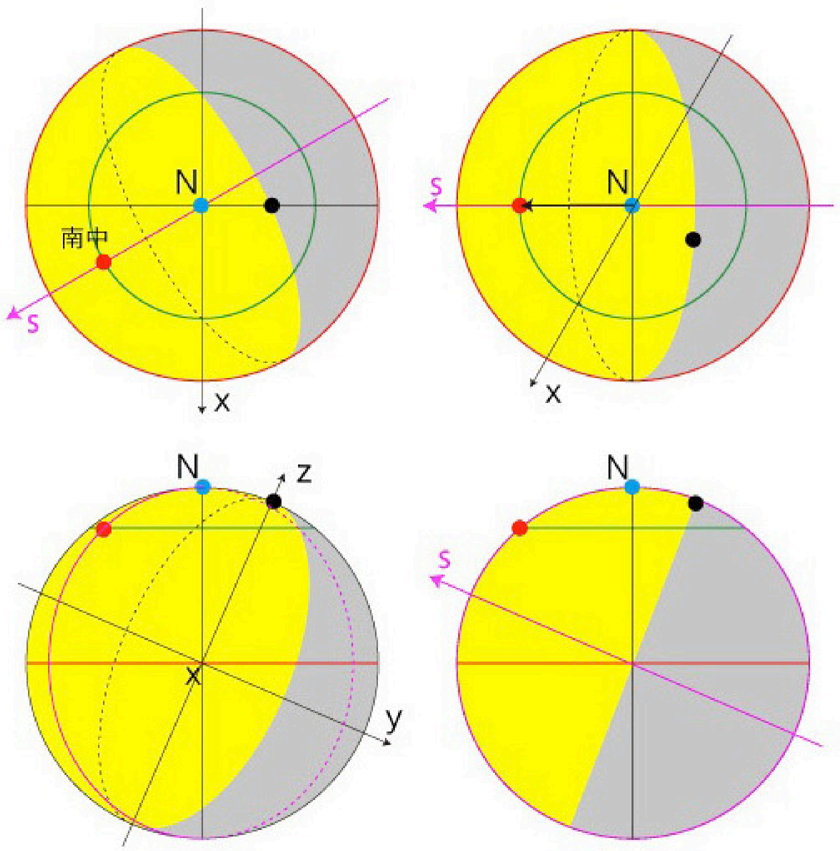
とおく。

さらにこの簡略記法

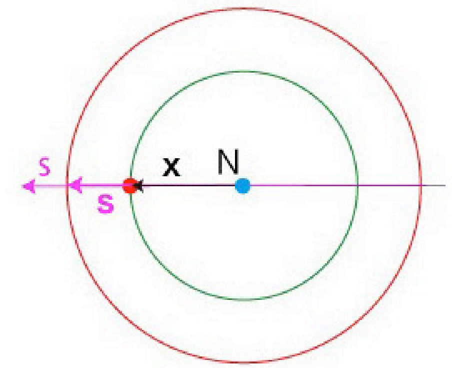
$$\theta_s = sin(\theta)$$
$$\theta_c = cos(\theta)$$

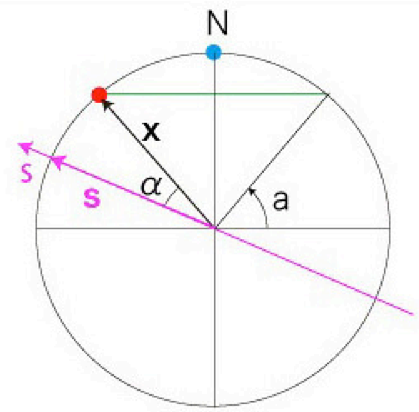
を，一般の θ に対しても用いるとする。

南中の位置：

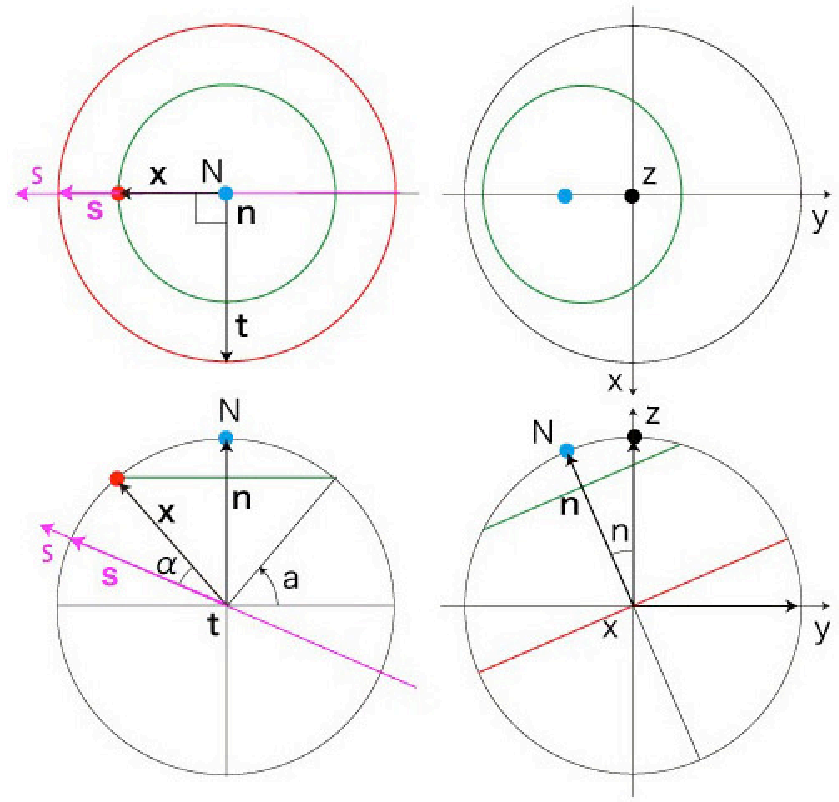


南中の位置ベクトルを **x** とする。





ベクトル**t**, **n** をつぎのようにとる：



このとき,

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{n}\times\mathbf{s}}{|\mathbf{n}\times\mathbf{s}|}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{n}\times\mathbf{s} &= (0, -n_s, n_c)\times(\tau_s, -\tau_c, 0)\\ &= ((-n_s)0 - n_c(-\tau_c), n_c\tau_s - 00, 0(-\tau_c) - (-n_s)\tau_s)\\ &= (n_c\tau_c,\ n_c\tau_s,\ n_s\tau_s)\end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned}0 &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{t}\\ &= (x, y, z)\cdot(n_c\tau_c,\ n_c\tau_s,\ n_s\tau_s)\\ &= (n_c\tau_c)x + (n_c\tau_s)y + (n_s\tau_s)z \quad \cdots\ (1)\end{aligned}$$

緯度 a の点の座標 (x, y, z) では，つぎが必要条件になる (☞ 自転軸系経度緯度と公転軸系直交座標の変換式 2.1)：

$$(n_s)y + (-n_c)z + a_s = 0 \quad \cdots\ (2)$$

$$(1)\times n_c + (2)\times(n_s\tau_s)\ :$$

$$\begin{aligned}0 &= ((n_c)^2\tau_c x + (n_c)^2\tau_s y + n_s n_c\tau_s z\\ &\quad + (n_s)^2\tau_s y + (-n_c)n_s\tau_s z + n_s a_s\tau_s\\ &= (n_c)^2\tau_c x + \tau_s y + n_s a_s\tau_s\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ y = \frac{-(n_c)^2\tau_c x - n_s a_s\tau_s}{\tau_s}$$

$$(1)\times n_s - (2)\times(n_c\tau_s)\ :$$

$$\begin{aligned}0 &= n_s n_c\tau_c x + n_s n_c\tau_s y + (n_s)^2\tau_s z\\ &\quad - (n_s n_c\tau_s y - (n_c)^2\tau_s z + n_c a_s\tau_s)\\ &= n_s n_c\tau_c x + \tau_s z - n_c a_s\tau_s\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ z = \frac{-n_s n_c\tau_c x + n_c a_s\tau_s}{\tau_s}$$

よって,

$$\begin{aligned}&x^2 + y^2 + z^2 = 1\\ \Longrightarrow\ &x^2 + \left(\frac{-(n_c)^2\tau_c x - n_s a_s\tau_s}{\tau_s}\right)^2 + \left(\frac{-n_s n_c\tau_c x + n_c a_s\tau_s}{\tau_s}\right)^2 = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\ &(\tau_s)^2x^2\\ &+((n_c)^2\tau_c x)^2 + 2((n_c)^2\tau_c x)(n_s a_s\tau_s) + (n_s a_s\tau_s)^2\\ &+(n_s n_c\tau_c x)^2 - 2(n_s n_c\tau_c x)(n_c a_s\tau_s) + (n_c a_s\tau_s)^2\\ &=(\tau_s)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\ &(\tau_s)^2x^2\\ &+(n_c)^2(n_c)^2(\tau_c)^2x^2 + 2n_s(n_c)^2a_s\tau_s\tau_c x + (n_s)^2(a_s)^2(\tau_s)^2\\ &+(n_s)^2(n_c)^2(\tau_c)^2x^2 - 2n_s(n_c)^2a_s\tau_s\tau_c x + (n_c)^2(a_s)^2(\tau_s)^2\\ &=(\tau_s)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\ &((\tau_s)^2 + (n_c)^2(n_c)^2(\tau_c)^2 + (n_s)^2(n_c)^2(\tau_c)^2)x^2\\ &+2(n_s(n_c)^2a_s\tau_s\tau_c - n_s(n_c)^2a_s\tau_s\tau_c)x\\ &+(n_s)^2(a_s)^2(\tau_s)^2 + (n_c)^2(a_s)^2(\tau_s)^2 - (\tau_s)^2 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\ &((\tau_s)^2 + (n_c)^2(\tau_c)^2)x^2\\ &+(a_s)^2(\tau_s)^2 - (\tau_s)^2 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\ &(1 - (\tau_c)^2 + (n_c)^2(\tau_c)^2)x^2\\ &-(1-(a_s)^2)(\tau_s)^2 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\ &(1 - (n_s)^2(\tau_c)^2)x^2\\ &-(a_c)^2(\tau_s)^2 = 0\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ x = \pm\frac{a_c\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$

さらに

$$\begin{aligned}y &= -\frac{(n_c)^2\tau_c}{\tau_s}x - n_s a_s\\ &= \mp\frac{(n_c)^2\tau_c}{\tau_s}\frac{a_c\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} - n_s a_s\\ &= \mp\frac{(n_c)^2a_c\tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} - n_s a_s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z &= -\frac{n_s n_c\tau_c}{\tau_s}x + n_c a_s\\ &= \mp\frac{n_s n_c\tau_c}{\tau_s}\frac{a_c\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} + n_c a_s\\ &= \mp\frac{n_s n_c a_c\tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} + n_c a_s\end{aligned}$$

まとめ

南中

$$x = \frac{a_c \tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$

$$y = -\frac{(n_c)^2 a_c \tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} - n_s a_s$$

$$z = -\frac{n_s n_c a_c \tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} + n_c a_s$$

北中

$$x = -\frac{a_c \tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$

$$y = +\frac{(n_c)^2 a_c \tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} - n_s a_s$$

$$z = +\frac{n_s n_c a_c \tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} + n_c a_s$$

3.2.2　南中太陽の高度

定理

公転角度が τ のときの，緯度 a での南中太陽の仰角余角 α は，

$$\alpha_c = a_c \sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2} + n_s a_s \tau_c$$

以下，これの証明。

3.1.1

公転角度が τ のとき，座標 (x, y, z) での太陽の仰角余角 α は，つぎの通り（☞ 太陽の高度）：

$$cos(\alpha) = \tau_s\, x - \tau_c\, y \qquad 3.2.1$$

また，南中の座標はつぎの通り（☞ 南中の座標）：

$$x = \frac{a_c \tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$

$$y = -\frac{(n_c)^2 a_c \tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} - n_s a_s$$

以上を合わせて：

$$\begin{aligned}
\alpha_c &= \tau_s \frac{a_c \tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} - \tau_c \left(-\frac{(n_c)^2 a_c \tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} - n_s a_s \right) \\
&= \frac{a_c(\tau_s)^2 + (n_c)^2 a_c (\tau_c)^2}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} + n_s a_s \tau_c \\
&= \frac{a_c((1-(\tau_c)^2) + (n_c)^2(\tau_c)^2)}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} + n_s a_s \tau_c \\
&= \frac{a_c(1-(n_s)^2(\tau_c)^2)}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} + n_s a_s \tau_c \\
&= a_c \sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2} + n_s a_s \tau_c
\end{aligned}$$

例. 秋分 ($\tau = \pi/2$) の場合

$\tau_c = 0,\ \tau_s = 1$ により，$\alpha_c = a_c$

よって，$\alpha = a$

3.3　日出・日入

3.3.1　日出・日入の座標

3.3.1　日出・日入の座標

問題
公転角が τ のときの，緯度 a の日の出・日の入りの地点の座標は？

はじめに，つぎを条件として措くことが必要になる (以下の推論の中でこのことがわかってくる)：

$$a > n$$
$$a + n < \frac{\pi}{2}$$

簡単のため

$$n_s = sin(n),\ \ n_c = cos(n)$$
$$a_s = sin(a),\ \ a_c = cos(a)$$
$$\tau_s = sin(\tau),\ \ \tau_c = cos(\tau)$$

とおく。
さらにこの簡略記法

$$x_s = sin(x)$$
$$x_c = cos(x)$$

を，一般の x に対しても用いるとする。

(1) $\tau = 1/2\pi, 3/2\pi$ のとき

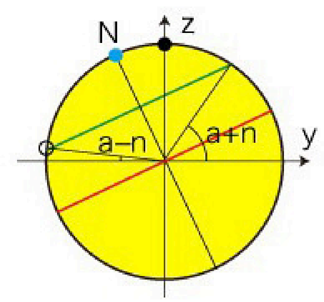
(1.1) $\tau = 1/2\pi$ (春分) のとき

日出は

$$x = 0$$
$$y = -(a - n)_c$$
$$z = (a - n)_s$$

日入は,

$$x = 0$$
$$y = (a + n)_c$$
$$z = (a + n)_s$$



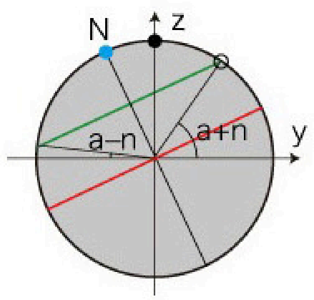
(1.2) $\tau = 3/2\pi$ (秋分) のとき

日出は

$$x = 0$$
$$y = (a+n)_c$$
$$z = (a+n)_s$$

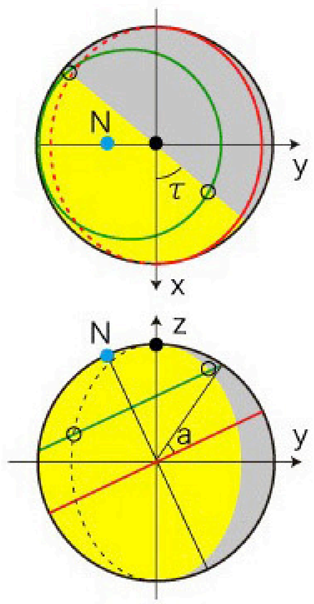
日入は,

$$x = 0$$
$$y = -(a-n)_c$$
$$z = (a-n)_s$$

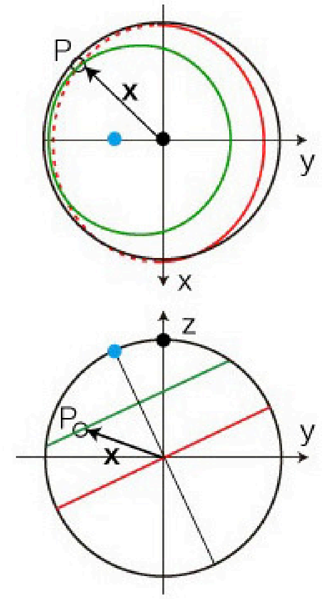


(2) $\tau \neq 0, \pi$ のとき

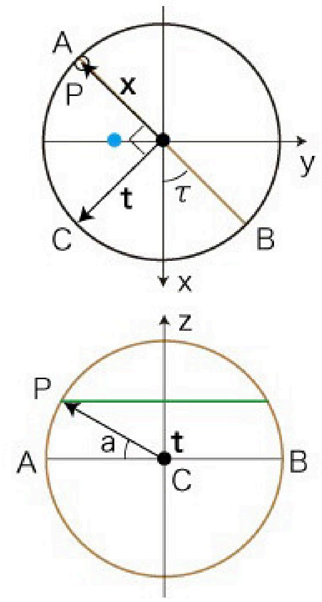
日出・日入点の位置：



日出点 P の位置ベクトルを $\mathbf{x}$ とする。



ベクトル$\mathbf{t}$ をつぎのようにとる：



このとき,

$$\mathbf{t} = (\tau_s, -\tau_c, 0)$$
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = 0$$

そしてこれより

$$\Longrightarrow (x, y, z) \cdot (\tau_s, -\tau_c, 0) = 0$$
$$\Longrightarrow \tau_s\, x - \tau_c\, y = 0$$

$$\Longrightarrow y = \frac{\tau_s}{\tau_c} x$$

緯度 a の点の座標 (x, y, z) では，つぎが必要条件になる (☞ 自転軸系経度緯度と公転軸系直交座標の変換式) :

2.1

$$a_s = -n_s\, y + n_c\, z$$

よって，

$$\begin{aligned} z &= \frac{n_s\, y + a_s}{n_c} \\ &= \frac{n_s\tau_s\, x + a_s\tau_c}{n_c\tau_c} \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \Longrightarrow & x^2 + (\frac{\tau_s}{\tau_c}x)^2 + (\frac{n_s\tau_s\, x + a_s\tau_c}{n_c\tau_c})^2 = 1 \\ \Longrightarrow & x^2 + \frac{(\tau_s)^2}{(\tau_c)^2}\, x^2 \\ & \quad + \frac{(n_s\, \tau_s)^2\, x^2 + 2n_s\, \tau_s\, \tau_c\, a_s\, x + (a_s)^2(\tau_c)^2}{(n_c)^2(\tau_c)^2} = 1 \\ \Longrightarrow & ((n_c\tau_c)^2 + (n_c\tau_s)^2 + (n_s\, \tau_s)^2)\, x^2 \\ & \quad + 2(n_s\, a_s\, \tau_s\, \tau_c)\, x \\ & \quad + (a_s\tau_c)^2 = (n_c\tau_c)^2 \\ \Longrightarrow & ((n_c\tau_c)^2 + (\tau_s)^2)\, x^2 \\ & \quad + 2(n_s\, a_s\, \tau_s\, \tau_c)\, x \\ & \quad + (a_s\tau_c)^2 - (n_c\tau_c)^2 = 0 \\ \Longrightarrow & ((n_c\tau_c)^2 + 1 - (\tau_c)^2)\, x^2 \\ & \quad + 2(n_s\, a_s\, \tau_s\, \tau_c)\, x \\ & \quad + ((a_s)^2 - (n_c)^2)(\tau_c)^2 = 0 \\ \Longrightarrow & (1 - (n_s)^2(\tau_c)^2)\, x^2 \\ & \quad + 2(n_s\, a_s\, \tau_s\, \tau_c)\, x \\ & \quad + ((a_s)^2 - (n_c)^2)(\tau_c)^2 = 0 \\ \Longrightarrow & x = \frac{-n_s\, a_s\, \tau_s\, \tau_c \pm \sqrt{D}}{1 - (n_s)^2(\tau_c)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= (n_s a_s \tau_s \tau_c)^2 - (1 - (n_s)^2(\tau_c)^2)((a_s)^2 - (n_c)^2)(\tau_c)^2 \\ &= (n_s)^2(a_s)^2(\tau_s)^2(\tau_c)^2 - \\ & \quad ((1 - (n_s)^2(\tau_c)^2)(a_s)^2 - (1 - (n_s)^2(\tau_c)^2)(n_c)^2)(\tau_c)^2 \\ &= (n_s)^2(a_s)^2(\tau_s)^2(\tau_c)^2 - \\ & \quad ((a_s)^2 - (n_s)^2(a_s)^2(\tau_c)^2 - (n_c)^2 + (n_s)^2(\tau_c)^2(n_c)^2)(\tau_c)^2 \\ &= ((n_s)^2(a_s)^2(\tau_s)^2 - (a_s)^2 + (n_s)^2(a_s)^2(\tau_c)^2 + (n_c)^2 - (n_s)^2(\tau_c)^2(n_c)^2)(\tau_c)^2 \\ &= ((n_c)^2 + (n_s)^2(a_s)^2(\tau_s)^2 + (n_s)^2(a_s)^2(\tau_c)^2 - (a_s)^2 - (n_s)^2(\tau_c)^2(n_c)^2)(\tau_c)^2 \\ &= ((n_c)^2 + (n_s)^2(a_s)^2 - (a_s)^2 - (n_s)^2(\tau_c)^2(n_c)^2)(\tau_c)^2 \\ &= ((n_c)^2 - (1 - (n_s)^2)(a_s)^2 - (n_s)^2(\tau_c)^2(n_c)^2)(\tau_c)^2 \\ &= ((n_c)^2 - (n_c)^2(a_s)^2 - (n_s)^2(\tau_c)^2(n_c)^2)(\tau_c)^2 \\ &= ((1 - (a_s)^2) - (n_s)^2(\tau_c)^2)(n_c)^2(\tau_c)^2 \\ &= ((a_c)^2 - (n_s)^2(\tau_c)^2)(n_c)^2(\tau_c)^2 \end{aligned}$$

はじめに a + n < $\pi/2$ を条件として描いたが，このとき

$$\begin{aligned} & a < \frac{\pi}{2} - n \\ \Longrightarrow \quad & a_c > cos(\frac{\pi}{2} - n) = n_s \\ \Longrightarrow \quad & D > 0 \end{aligned}$$

x が

$$x = \frac{-n_s\, a_s\, \tau_s\, \tau_c \pm n_c\tau_c\sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2(\tau_c)^2}}{1 - (n_s)^2(\tau_c)^2}$$

と確定したところで，

$$y = \frac{\tau_s}{\tau_c}x = \frac{-n_s\, a_s\, (\tau_s)^2 \pm n_c\tau_s\sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2(\tau_c)^2}}{1 - (n_s)^2(\tau_c)^2}$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{n_s\, y + a_s}{n_c} \\ &= \frac{-(n_s)^2\, a_s\, (\tau_s)^2 \pm n_s n_c \tau_s\sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2(\tau_s)^2} + a_s(1 - (n_s)^2(\tau_c)^2)}{n_c\, (1 - (n_s)^2(\tau_c)^2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{-(n_s)^2\ a_s\ (\tau_s)^2 \pm n_s n_c \tau_s \sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2(\tau_s)^2} + a_s(1-(n_s)^2(1-(\tau_s)^2)}{n_c\ (1-(n_s)^2(\tau_c)^2)}$$

$$= \frac{-(n_s)^2\ a_s\ (\tau_s)^2 \pm n_s n_c \tau_s \sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2(\tau_s)^2} + a_s(1-(n_s)^2+(n_s)^2(\tau_s)^2)}{n_c\ (1-(n_s)^2(\tau_c)^2)}$$

$$= \frac{-(n_s)^2\ a_s\ (\tau_s)^2 \pm n_s n_c \tau_s \sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2(\tau_s)^2} + a_s(n_c)^2 + a_s(n_s)^2(\tau_s)^2}{n_c\ (1-(n_s)^2(\tau_c)^2)}$$

$$= \frac{n_c a_s \pm n_s \tau_s \sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2(\tau_s)^2}}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}$$

まとめ

a ＜ π/2 - n である a に対し,

日出

τ = 1/2π (春分) のとき

$$x = 0$$
$$y = -(a-n)_c$$
$$z = (a+n)_c$$

τ = 3/2π (秋分) のとき

$$x = 0$$
$$y = (a+n)_c$$
$$z = -(a-n)_c$$

$\tau \neq 0, \pi$ のとき

$$x = \frac{-n_s\ a_s\ \tau_s\ \tau_c - n_c \tau_c \sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2(\tau_c)^2}}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}$$

$$y = \frac{-n_s\ a_s\ (\tau_s)^2 - n_c \tau_s \sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2(\tau_c)^2}}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}$$

$$z = \frac{n_c a_s - n_s \tau_s \sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2(\tau_s)^2}}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}$$

日入

τ = 1/2π (春分) のとき

$$x = 0$$
$$y = (a+n)_c$$
$$z = (a+n)_s$$

τ = 3/2π (秋分)のとき

$$x = 0$$
$$y = -(a-n)_c$$
$$z = (a-n)_s$$

$\tau \neq 0, \pi$ のとき

$$x = \frac{-n_s\ a_s\ \tau_s\ \tau_c + n_c \tau_c \sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2(\tau_c)^2}}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}$$

$$y = \frac{-n_s\ a_s\ (\tau_s)^2 + n_c \tau_s \sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2(\tau_c)^2}}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}$$

$$z = \frac{n_c a_s + n_s \tau_s \sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2(\tau_s)^2}}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}$$

4　自転軸系極座標計算

4.1　太陽の定位

4.1.1　太陽の高度

定理

公転角度が τ のとき，緯度 a，経度 b の点での太陽の仰角余角 α は，

$$\alpha_c = a_c\tau_s\, b_c - n_c a_c \tau_c\, b_s + n_s a_s \tau_c$$

証明：

公転角度が τ のとき，座標 (x, y, z) の点での太陽の仰角は，つぎの α に対する $\pi/2$ である (☞ 太陽の高度)：

$$\begin{aligned} cos(\alpha) &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{s} \\ &= (x, y, z)\cdot(\tau_s, -\tau_c, 0) \\ &= \tau_s\, x - \tau_c\, y \end{aligned}$$

そして自転軸系経度緯度と公転軸系直交座標の変換式から 2.1

$$\begin{aligned} x &= a_c\, b_c \\ y &= -n_s a_s + n_c a_c b_s \end{aligned}$$

以上を合わせて，

$$\begin{aligned} cos(\alpha) &= \tau_s\, x - \tau_c\, y \\ &= \tau_s\, a_c\, b_c - \tau_c(-n_s a_s + n_c a_c b_s) \\ &= a_c\tau_s\, b_c - n_c a_c \tau_c\, b_s + n_s a_s \tau_c \end{aligned}$$

例１. 夏至の南中太陽の仰角余角 α

これは，$\tau = 0,\ b = \frac{3}{2}\pi$ の場合である。

$\tau_s = 0,\ \tau_c = 1,\ b_s = -1,\ b_c = 0$ なので，

$$\begin{aligned} \alpha_c &= a_c\tau_s\, b_c - n_c a_c \tau_c\, b_s + n_s a_s \tau_c \\ &= n_c a_c + n_s a_s \end{aligned}$$

例２.　秋分の時の北緯45度での，一日の太陽高度の変化

a = $\pi/4$,　τ = $\pi/2$ であるから，

$$\begin{aligned} cos(\alpha) &= a_c\tau_s\, b_c \pm n_c a_c \tau_c\, b_s + n_s a_s \tau_c \\ &= cos(\frac{\pi}{4}) b_c = \frac{b_c}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

これから太陽高度 (仰角) $\beta = \pi/2 - \alpha$ を計算すると：

経度	太陽高度 (仰角)
0	45
10	44
20	42
30	38
40	33
50	27
60	21
70	14
80	7
90	0
100	-7
110	-14
120	-21
130	-27
140	-33
150	-38
160	-42
170	-44
180	-45
190	-44
200	-42
210	-38
220	-33
230	-27
240	-21
250	-14
260	-7
270	0
280	7
290	14
300	21
310	27
320	33
330	38
340	42
350	44

4.1.2　太陽の方角

「太陽の方角」で，太陽方角ベクトル $\mathbf{d}$ を求めた：

$$\begin{aligned}\mathbf{d} = (\ &\tau_s(y^2+z^2)+\tau_c(xy),\\ &-\tau_s(xy)-\tau_c(z^2+x^2),\\ &-\tau_s(zx)+\tau_c(yz))\end{aligned}$$

$$|\mathbf{d}| = \sqrt{1-(\tau_s\ x-\tau_c\ y)^2}$$

「自転軸系経度緯度と公転軸系直交座標の変換式」から，
2.1

$$\begin{aligned}x &= a_c b_c\\ y &= n_c a_c b_s - n_s a_s\\ z &= n_s a_c b_s + n_c a_s\end{aligned}$$

以上を合わせて：

$$\begin{aligned}&\tau_s(y^2+z^2)+\tau_c(xy)\\ &=\tau_s(1-x^2)+\tau_c(xy)\\ &=\tau_s-\tau_s(a_cb_c)^2+\tau_c(a_cb_c)(n_ca_cb_s-n_sa_s)\\ &=\tau_s-\tau_s(a_c)^2(b_c)^2+\tau_ca_cb_cn_ca_cb_s-\tau_ca_cb_cn_sa_s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\tau_s-\tau_s(a_c)^2(b_c)^2\\ &+\tau_cn_c(a_c)^2b_sb_c\\ &-\tau_cn_sa_sa_cb_c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-\tau_s(xy)-\tau_c(z^2+x^2)\\ &=-\tau_s(xy)-\tau_c(1-y^2)\\ &=-\tau_s(a_cb_c)(n_ca_cb_s-n_sa_s)-\tau_c+\tau_c(n_ca_cb_s-n_sa_s)^2\\ &=-\tau_sa_cb_cn_ca_cb_s+\tau_sa_cb_cn_sa_s\\ &-\tau_c+\tau_c((n_c)^2(a_c)^2(b_s)^2-2n_ca_cb_sn_sa_s+(n_s)^2(a_s)^2)\\ &=-\tau_sn_c(a_c)^2b_sb_c+\tau_sn_sa_sa_cb_c\\ &-\tau_c+\tau_c(n_c)^2(a_c)^2(b_s)^2-2\tau_cn_sn_ca_sa_cb_s+\tau_c(n_s)^2(a_s)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\tau_c(n_c)^2(a_c)^2(b_s)^2\\ &-\tau_sn_c(a_c)^2b_sb_c\\ &-2\tau_cn_sn_ca_sa_cb_s\\ &+\tau_sn_sa_sa_cb_c\\ &+\tau_c(n_s)^2(a_s)^2-\tau_c\end{aligned}$$

$$-\tau_s(zx)+\tau_c(yz)$$

$$\begin{aligned}&=-\tau_s(n_sa_cb_s+n_ca_s)(a_cb_c)\\ &\quad+\tau_c(n_ca_cb_s-n_sa_s)(n_sa_cb_s+n_ca_s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=-\tau_s(n_sa_cb_sa_cb_c+n_ca_sa_cb_c)\\ &\quad+\tau_c(n_ca_cb_sn_sa_cb_s+n_ca_cb_sn_ca_s-n_sa_sn_sa_cb_s-n_sa_sn_ca_s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=-\tau_s(n_sa_c^2b_sb_c+n_ca_sa_cb_c)\\ &\quad+\tau_c(n_sn_ca_c^2b_s^2+n_c^2a_sa_cb_s-n_s^2a_sa_cb_s-n_sn_ca_s^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=-\tau_sn_sa_c^2b_sb_c\\ &\quad-\tau_sn_ca_sa_cb_c\\ &\quad+\tau_cn_sn_ca_c^2b_s^2\\ &\quad+\tau_cn_c^2a_sa_cb_s\\ &\quad-\tau_cn_s^2a_sa_cb_s\\ &\quad-\tau_cn_sn_ca_s^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\tau_cn_sn_ca_c^2b_s^2\\ &\quad-\tau_sn_sa_c^2b_sb_c\\ &\quad+\tau_c(n_c^2-n_s^2)a_sa_cb_s\\ &\quad-\tau_sn_ca_sa_cb_c\\ &\quad-\tau_cn_sn_ca_s^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\mathbf{d}| &= \sqrt{1-(\tau_s\ x-\tau_c\ y)^2}\\ &= \sqrt{1-(\tau_s\ (a_cb_c)-\tau_c\ (n_ca_cb_s-n_sa_s))^2}\end{aligned}$$

$$1-(\tau_s\ (a_cb_c)-\tau_c\ (n_ca_cb_s-n_sa_s))^2$$

$$\begin{aligned}&=1-((\tau_s)^2(a_c)^2(b_c)^2\\ &-2\tau_sa_cb_c\tau_c(n_ca_cb_s-n_sa_s)\\ &+(\tau_c)^2(\ n_ca_cb_s-n_sa_s)^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=-(a_c)^2(\tau_s)^2(b_c)^2\\ &+2n_c(a_c)^2\tau_s\tau_cb_sb_c\\ &-2n_sa_sa_c\tau_s\tau_cb_c\\ &-(\tau_c)^2(\ (n_c)^2(a_c)^2(b_s)^2-2n_ca_cb_sn_sa_s+(n_s)^2(a_s)^2)+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=-(n_c)^2(a_c)^2(\tau_c)^2(b_s)^2\\ &-(a_c)^2(\tau_s)^2(b_c)^2\\ &+2n_c(a_c)^2\tau_s\tau_cb_sb_c\\ &+2n_cn_sa_sa_c(\tau_c)^2b_s\\ &-2n_sa_sa_c\tau_s\tau_cb_c\\ &-(n_s)^2(a_s)^2(\tau_c)^2+1\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(a_c)^2((n_c)^2(\tau_c)^2(b_s)^2 + (\tau_s)^2(b_c)^2 - 2n_c\tau_s\tau_c b_s b_c) \\
&+ 2n_c n_s a_s a_c(\tau_c)^2 b_s \\
&- 2n_s a_s a_c \tau_s \tau_c b_c \\
&- (n_s)^2(a_s)^2(\tau_c)^2 + 1 \\
\\
&= -(a_c)^2(n_c\tau_c b_s - \tau_s b_c)^2 \\
&+ 2n_s a_s a_c \tau_c(n_c\tau_c b_s - \tau_s b_c) \\
&- (n_s)^2(a_s)^2(\tau_c)^2 + 1 \\
\\
&= -(a_c(n_c\tau_c b_s - \tau_s b_c) - n_s a_s \tau_c)^2 + (n_s)^2(a_s)^2(\tau_c)^2 \\
&- (n_s)^2(a_s)^2(\tau_c)^2 + 1 \\
\\
&= 1 - (a_c(n_c\tau_c b_s - \tau_s b_c) - n_s a_s \tau_c)^2
\end{aligned}
$$

まとめ
公転角度τ，緯度a，経度ｂでは，つぎのベクトル $\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_y)$ が太陽方角ベクトルになる：

$$
\begin{aligned}
d_x &= -\tau_s(a_c)^2(b_c)^2 \\
&\quad + \tau_c n_c(a_c)^2 b_s b_c \\
&\quad - \tau_c n_s a_s a_c b_c + \tau_s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_y &= \tau_c(n_c)^2(a_c)^2(b_s)^2 \\
&\quad - \tau_s n_c(a_c)^2 b_s b_c \\
&\quad - 2\tau_c n_s n_c a_s a_c b_s \\
&\quad + \tau_s n_s a_s a_c b_c \\
&\quad + \tau_c(n_s)^2(a_s)^2 - \tau_c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_z &= \tau_c n_s n_c a_c^2 b_s^2 \\
&\quad - \tau_s n_s a_c^2 b_s b_c \\
&\quad + \tau_c(n_c^2 - n_s^2) a_s a_c b_s \\
&\quad - \tau_s n_c a_s a_c b_c \\
&\quad - \tau_c n_s n_c a_s^2
\end{aligned}
$$

$$
|\mathbf{d}| = \sqrt{1 - (a_c(n_c\tau_c b_s - \tau_s b_c) - n_s a_s \tau_c)^2}
$$

例：秋分（ $\tau = \pi/2$ ）の場合
$\tau_s = 1,\ \tau_c = 0$ なので，

$$
\begin{aligned}
d_x &= -a_c^2 b_c^2 + 1 \\
d_y &= -n_c a_c^2 b_s b_c + n_s a_s a_c b_c \\
d_z &= n_s a_c^2 b_s b_c - n_c a_s a_c b_c \\
|\mathbf{d}| &= \sqrt{1 - (a_c(-b_c))^2} \\
&= \sqrt{1 - (a_c)^2(b_c)^2}
\end{aligned}
$$

南中は $b_c = 1, b_s = 0$ のときで，このとき

$$
\begin{aligned}
d_x &= -a_c^2 + 1 = a_s^2 \\
d_y &= n_s a_s a_c \\
d_z &= -n_c a_s a_c \\
|\mathbf{d}| &= \sqrt{1 - (a_c)^2} = a_s
\end{aligned}
$$

検算

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{d}| &= \sqrt{(a_s^2)^2 + (n_s a_s a_c)^2 + (-n_c a_s a_c)^2} \\
&= a_s\sqrt{a_s^2 + n_s^2 a_c^2 + n_c^2 a_c^2} \\
&= a_s\sqrt{a_s^2 + a_c^2} \\
&= a_s
\end{aligned}
$$

$\mathbf{d}$ を単位ベクトル化すると：

$$
\mathbf{d}_u = (a_s, -n_s a_c, n_c a_c)
$$

この方角での太陽の仰角をβとすると，

$$
\begin{aligned}
\beta_c &= \mathbf{d}_u \cdot \mathbf{s} \\
&= (a_s, -n_s a_c, n_c a_c) \cdot (\tau_s, -\tau_c, 0) \\
&= (a_s, -n_s a_c, n_c a_c) \cdot (1, 0, 0) \\
&= a_s
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow\ \beta = \frac{\pi}{2} - a
$$

4.2 南中

4.2.1 南中の座標

問題
公転角が τ のときの，緯度 a の南中の経度は？

「南中の直交座標計算式」で，つぎを得ている：

$$x = \frac{a_c \tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$

そして，「自転軸系経度緯度と公転軸系直交座標の変換式」[2.1] で，つぎを得ている：

$$x = a_c b_c$$

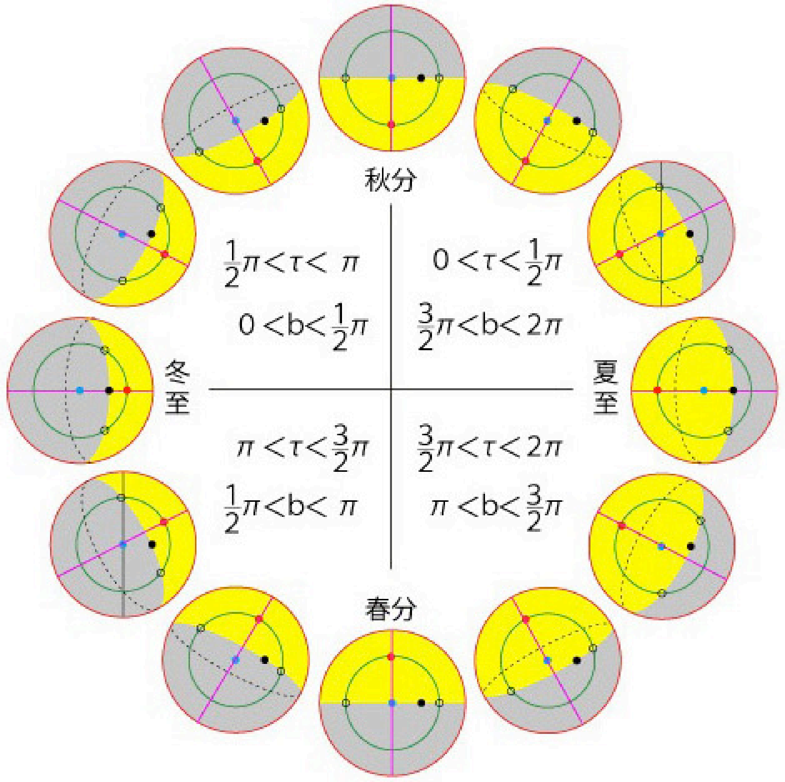
よって，

$$b_c = \frac{\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$

$$\begin{aligned}(b_s)^2 &= 1-(b_c)^2 \\ &= 1-\frac{(\tau_s)^2}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2} \\ &= \frac{1-(n_s)^2(\tau_c)^2-(\tau_s)^2}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2} \\ &= \frac{(\tau_c)^2-(n_s)^2(\tau_c)^2}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2} \\ &= \frac{(n_c)^2(\tau_c)^2}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}\end{aligned}$$

$b_s > 0$ は $0 < b < \pi$ のときで，そしてこのときは $1/2\pi < \tau < 3/2\pi$ であり，$\tau_c < 0$。
よって，つぎのようになる：

$$b_s = \frac{-n_c \tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$



まとめ
公転角が τ のときの，緯度 a の南中の経度 b は，

$$b_c = \frac{\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$

$$b_s = \frac{-n_c\tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$

4.2.2　南中太陽の高度

定理
公転角度が τ のときの，緯度 a での南中太陽の仰角余角 α は，

$$\alpha_c = a_c\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2} + n_s a_s \tau_c$$

これは既に，つぎの経路で導いている：

直交座標： 太陽の高度 ＋ 南中の座標 → 南中太陽の高度

ここでは，ついでにということで，つぎの経路で導いておく：

極座標： 太陽の高度 ＋ 南中の座標 → 南中太陽の高度

公転角度が τ，緯度 a，経度 b での太陽の高度は，つぎの通り(☞ 太陽の高度 4.1.1)：

$$\alpha_c = a_c\tau_s\, b_c - n_c a_c \tau_c\, b_s + n_s a_s \tau_c$$

また，南中の座標はつぎの通り (☞ 南中の座標)：

$$b_c = \frac{\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$

$$b_s = \frac{-n_c\tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$

以上を合わせて：

$$\begin{aligned}
\alpha_c &= a_c\tau_s\frac{\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} \\
&\quad - n_c a_c \tau_c \frac{-n_c\tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} + n_s a_s \tau_c \\
&= \frac{a_c(\tau_s)^2 + (n_c)^2 a_c(\tau_c)^2}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} + n_s a_s \tau_c \\
&= \frac{a_c((1-\tau_c)^2) + (n_c)^2(\tau_c)^2)}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} + n_s a_s \tau_c \\
&= \frac{a_c((1-\tau_c)^2) + (n_c)^2(\tau_c)^2)}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} + n_s a_s \tau_c \\
&= \frac{a_c((1-(n_s)^2(\tau_c)^2)}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} + n_s a_s \tau_c \\
&= a_c\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2} + n_s a_s \tau_c
\end{aligned}$$

例. 秋分 ($\tau = \pi/2$) の場合

$\tau_c = 0$ により，$\alpha_c = a_c$
よって，$\alpha = a$

4.2.3　南中太陽の方角

公転角度τ，緯度a，経度ｂでは，つぎのベクトル (d_x, d_y, d_y) が太陽方角ベクトルになる (☞ 緯度ａ経度ｂの点で見る＜太陽の方角＞)：
4.1.2

$$
\begin{aligned}
d_x = {} & \tau_s a_c^2 b_s^2 \\
& + \tau_c n_c a_c^2 b_s b_c \\
& - \tau_c n_s a_s a_c b_c \\
& + \tau_s a_s^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_y = {} & -\tau_c n_s^2 a_c^2 b_s^2 \\
& - \tau_c a_c^2 b_c^2 \\
& - \tau_s n_c a_c^2 b_s b_c \\
& - 2\tau_c n_s n_c a_s a_c b_s \\
& + \tau_s n_s a_s a_c b_c \\
& - \tau_c n_c^2 a_s^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_z = {} & \tau_c n_s n_c a_c^2 b_s^2 \\
& - \tau_s n_s a_c^2 b_s b_c \\
& + (\tau_c n_c^2 a_s a_c - \tau_c n_s^2 a_s a_c) b_s \\
& - \tau_s n_c a_s a_c b_c \\
& - \tau_c n_s n_c a_s^2
\end{aligned}
$$

4.2.1

$$
|\mathbf{d}| = \sqrt{1 - (a_c(n_c \tau_c b_s - \tau_s b_c) - n_s a_s \tau_c)^2}
$$

また，「南中の経度計算式」より：

$$
b_c = \frac{\tau_s}{\sqrt{1 - (n_s)^2 (\tau_c)^2}}
$$

$$
b_s = \frac{-n_c \tau_c}{\sqrt{1 - (n_s)^2 (\tau_c)^2}}
$$

以上を合わせて：

$$
\begin{aligned}
d_x = {} & \tau_s a_c^2 b_s^2 \\
& + \tau_c n_c a_c^2 b_s b_c \\
& - \tau_c n_s a_s a_c b_c \\
& + \tau_s a_s^2
\end{aligned}
$$

$$= \tau_s a_c^2 (\frac{-n_c \tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}})^2$$
$$+ \tau_c n_c a_c^2 \frac{-n_c \tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} \frac{\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$
$$- \tau_c n_s a_s a_c \frac{\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$
$$+ a_s^2 \tau_s$$

$$= \tau_s a_c^2 \frac{(n_c)^2(\tau_c)^2}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}$$
$$+ \tau_c n_c a_c^2 \frac{-n_c \tau_s \tau_c}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}$$
$$- \tau_c n_s a_s a_c \frac{\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} + a_s^2 \tau_s$$

$$= \frac{\tau_s (a_c)^2 (n_c)^2 (\tau_c)^2 - \tau_c n_c a_c^2 n_c \tau_s \tau_c}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}$$
$$- \frac{\tau_c n_s a_s a_c \tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} + a_s^2 \tau_s$$

$$= \frac{(n_c)^2 (a_c)^2 \tau_s (\tau_c)^2 - (n_c)^2 (a_c)^2 \tau_s (\tau_c)^2}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}$$
$$- \frac{n_s a_s a_c \tau_s \tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} + a_s^2 \tau_s$$

$$= -\frac{n_s a_s a_c \tau_s \tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} + a_s^2 \tau_s$$

$$d_y = -\tau_c n_s^2 a_c^2 (\frac{-n_c \tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}})^2$$
$$- \tau_c a_c^2 (\frac{\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}})^2$$
$$- \tau_s n_c a_c^2 \frac{-n_c \tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} \frac{\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$
$$- 2\tau_c n_s n_c a_s a_c \frac{-n_c \tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$
$$+ \tau_s n_s a_s a_c \frac{\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$
$$- \tau_c n_c^2 a_s^2$$

$$= -\tau_c n_s^2 a_c^2 \frac{(n_c)^2(\tau_c)^2}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}$$
$$- \tau_c a_c^2 \frac{(\tau_s)^2}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}$$
$$- \tau_s n_c a_c^2 \frac{-n_c \tau_s \tau_c}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}$$
$$+ \frac{2\tau_c n_s n_c a_s a_c n_c \tau_c + \tau_s n_s a_s a_c \tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$
$$- n_c^2 a_s^2 \tau_c$$

$$= \frac{-\tau_c n_s^2 a_c^2 (n_c)^2 (\tau_c)^2 - \tau_c (a_c)^2 (\tau_s)^2 + \tau_s n_c (a_c)^2 n_c \tau_s \tau_c}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}$$
$$+ \frac{2n_s (n_c)^2 a_s a_c (\tau_c)^2 + n_s a_s a_c (\tau_s)^2}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$
$$- (n_c)^2 (a_s)^2 \tau_c$$

$$-\tau_c n_s^2 a_c^2 (n_c)^2 (\tau_c)^2 - \tau_c (a_c)^2 (\tau_s)^2 + \tau_s n_c (a_c)^2 n_c \tau_s \tau_c$$

$$= -(n_s)^2 (n_c)^2 a_c^2 \tau_c (\tau_c)^2 - (a_c)^2 (\tau_s)^2 \tau_c + (n_c)^2 (a_c)^2 (\tau_s)^2 \tau_c$$

$$= (-(n_s)^2 (n_c)^2 (\tau_c)^2 - (\tau_s)^2 + (n_c)^2 (\tau_s)^2)(a_c)^2 \tau_c$$

$$= (-(n_s)^2 (n_c)^2 (\tau_c)^2 - (n_s)^2 (\tau_s)^2)(a_c)^2 \tau_c$$

$$= (-(n_c)^2 (\tau_c)^2 - (\tau_s)^2)(n_s)^2 (a_c)^2 \tau_c$$

$$= (-(n_c)^2 (\tau_c)^2 - (1-(\tau_c)^2))(n_s)^2 (a_c)^2 \tau_c$$

$$= ((\tau_c)^2 - (n_c)^2 (\tau_c)^2 - 1)(n_s)^2 (a_c)^2 \tau_c$$

$$= -(1-(n_s)^2 (\tau_c)^2)(a_c)^2 (n_s)^2 \tau_c$$

$$2n_s (n_c)^2 a_s a_c (\tau_c)^2 + n_s a_s a_c (\tau_s)^2$$

$$= (2(n_c)^2 (\tau_c)^2 + (\tau_s)^2) n_s a_s a_c$$

$$= ((n_c)^2 (\tau_c)^2 + (n_c)^2 (\tau_c)^2 + (1-(\tau_c)^2)) n_s a_s a_c$$

$$= ((n_c)^2 (\tau_c)^2 + 1 - (n_s)^2 (\tau_c)^2) n_s a_s a_c$$

$$d_y = \frac{-(1-(n_s)^2(\tau_c)^2)(n_s)^2(a_c)^2\tau_c}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2} + \frac{((n_c)^2(\tau_c)^2+1-(n_s)^2(\tau_c)^2))n_s a_s a_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} - (n_c)^2(a_s)^2\tau_c$$

$$= -((n_s)^2(a_c)^2+(n_c)^2(a_s)^2)\tau_c + \frac{((n_c)^2(\tau_c)^2+(1-(n_s)^2(\tau_c)^2))n_s a_s a_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$

$$d_z = \tau_c n_s n_c (a_c)^2 b_s^2 - \tau_s n_s (a_c)^2 b_s b_c + (\tau_c (n_c)^2 a_s a_c - \tau_c (n_s)^2 a_s a_c) b_s - \tau_s n_c a_s a_c b_c - \tau_c n_s n_c (a_s)^2$$

$$= \tau_c n_s n_c (a_c)^2 \left(\frac{-n_c\tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}\right)^2 - \tau_s n_s (a_c)^2 \frac{-n_c\tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}\frac{\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} + (\tau_c (n_c)^2 a_s a_c - \tau_c (n_s)^2 a_s a_c)\frac{-n_c\tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} - \tau_s n_c a_s a_c \frac{\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} - n_s n_c (a_s)^2 \tau_c$$

$$= \left(\frac{\tau_c n_s n_c (a_c)^2 (n_c)^2(\tau_c)^2 + \tau_s n_s (a_c)^2 n_c \tau_c \tau_s}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2} + \frac{-(\tau_c (n_c)^2 a_s a_c - \tau_c (n_s)^2 a_s a_c) n_c \tau_c - \tau_s n_c a_s a_c \tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} - n_s n_c (a_s)^2 \tau_c\right.$$

$$\tau_c n_s n_c (a_c)^2 (n_c)^2 (\tau_c)^2 + \tau_s n_s (a_c)^2 n_c \tau_c \tau_s$$

$$= n_s n_c (n_c)^2 (a_c)^2 (\tau_c)^2 \tau_c + n_s n_c (a_c)^2 (\tau_s)^2 \tau_c$$

$$= ((n_c)^2(\tau_c)^2 + (\tau_s)^2) n_s n_c (a_c)^2 \tau_c$$

$$= ((n_c)^2(\tau_c)^2 + 1 - (\tau_c)^2) n_s n_c (a_c)^2 \tau_c$$

$$= (1-(n_s)^2(\tau_c)^2) n_s n_c (a_c)^2 \tau_c$$

$$-(\tau_c (n_c)^2 a_s a_c - \tau_c (n_s)^2 a_s a_c) n_c \tau_c - \tau_s n_c a_s a_c \tau_s$$

$$= -\tau_c (n_c)^2 a_s a_c n_c \tau_c + \tau_c (n_s)^2 a_s a_c n_c \tau_c - \tau_s n_c a_s a_c \tau_s$$

$$= -(n_c)^2 n_c a_s a_c (\tau_c)^2 + (n_s)^2 n_c a_s a_c (\tau_c)^2 - n_c a_s a_c (\tau_s)^2$$

$$= (-(n_c)^2(\tau_c)^2 + (n_s)^2(\tau_c)^2 - (\tau_s)^2) n_c a_s a_c$$

$$= (-(n_c)^2(\tau_c)^2 + (n_s)^2(\tau_c)^2 - 1 + (\tau_c)^2) n_c a_s a_c$$

$$= ((n_s)^2(\tau_c)^2 + (n_s)^2(\tau_c)^2 - 1) n_c a_s a_c$$

$$= ((n_s)^2(\tau_c)^2 - (1-(n_s)^2(\tau_c)^2)) n_c a_s a_c$$

$$d_z = \left(\frac{(1-(n_s)^2(\tau_c)^2) n_s n_c (a_c)^2 \tau_c}{1-(n_s)^2(\tau_c)^2} + \frac{((n_s)^2(\tau_c)^2 - (1-(n_s)^2(\tau_c)^2)) n_c a_s a_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} - n_s n_c (a_s)^2 \tau_c\right.$$

$$= n_s n_c (a_c)^2 \tau_c - n_s n_c (a_s)^2 \tau_c + \frac{((n_s)^2(\tau_c)^2 - (1-(n_s)^2(\tau_c)^2)) n_c a_s a_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$

$$= n_s n_c ((a_c)^2 - (a_s)^2) \tau_c + \frac{((n_s)^2(\tau_c)^2 - (1-(n_s)^2(\tau_c)^2)) n_c a_s a_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$

$$|\mathbf{d}|^2 = 1 - (a_c(n_c\tau_c b_s - \tau_s b_c) - n_s a_s \tau_c)^2$$

$$= 1 - \left(a_c\left(n_c\tau_c \frac{-n_c\tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} - \tau_s \frac{\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}\right) - n_s a_s \tau_c\right)^2$$

$$= 1 - \left(-a_c \frac{(n_c)^2(\tau_c)^2 + (\tau_s)^2}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} - n_s a_s \tau_c\right)^2$$

$$= 1 - \left(-a_c \frac{(n_c)^2(\tau_c)^2 + 1 - (\tau_c)^2}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} - n_s a_s \tau_c\right)^2$$

$$= 1 - (-a_c \frac{1 - (n_s)^2(\tau_c)^2}{\sqrt{1 - (n_s)^2(\tau_c)^2}} - n_s a_s \tau_c)^2$$

$$= 1 - (-a_c \sqrt{1 - (n_s)^2(\tau_c)^2} - n_s a_s \tau_c)^2$$

$$= 1 - ((a_c)^2(1 - (n_s)^2(\tau_c)^2) + 2a_c\sqrt{1 - (n_s)^2(\tau_c)^2}\, n_s a_s \tau_c + (n_s)^2(a_s)^2(\tau_c)^2)$$

$$= 1 - (a_c)^2 + (n_s)^2(a_c)^2(\tau_c)^2 - (n_s)^2(a_s)^2(\tau_c)^2 - 2n_s a_s a_c \tau_c \sqrt{1 - (n_s)^2(\tau_c)^2}$$

$$= (a_s)^2 + (n_s)^2(a_c)^2(\tau_c)^2 - (n_s)^2(a_s)^2(\tau_c)^2 - 2n_s a_s a_c \tau_c \sqrt{1 - (n_s)^2(\tau_c)^2}$$

$$= (a_s)^2 + ((a_c)^2 - (a_s)^2)(n_s)^2(\tau_c)^2 - 2n_s a_s a_c \tau_c \sqrt{1 - (n_s)^2(\tau_c)^2}$$

まとめ
太陽方角ベクトル (d_x, d_y, d_y) ：

$$d_x = -\frac{n_s a_s a_c \tau_s \tau_c}{\sqrt{1 - (n_s)^2(\tau_c)^2}} + a_s^2 \tau_s$$

$$\begin{aligned} d_y &= -((n_s)^2(a_c)^2 + (n_c)^2(a_s)^2)\tau_c \\ &\quad + \frac{((n_c)^2(\tau_c)^2 + (1 - (n_s)^2(\tau_c)^2))n_s a_s a_c}{\sqrt{1 - (n_s)^2(\tau_c)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_z &= n_s n_c((a_c)^2 - (a_s)^2)\tau_c \\ &\quad + \frac{((n_s)^2(\tau_c)^2 - (1 - (n_s)^2(\tau_c)^2))n_c a_s a_c}{\sqrt{1 - (n_s)^2(\tau_c)^2}} \end{aligned}$$

$$|\mathbf{d}|^2 = (a_s)^2 + ((a_c)^2 - (a_s)^2)(n_s)^2(\tau_c)^2 - 2n_s a_s a_c \tau_c \sqrt{1 - (n_s)^2(\tau_c)^2}$$

4.3　日出・日入

4.3.1　日出・日入の座標

4.3.1　日出・日入の座標

問題
公転角が τ のときの，緯度 a の日の出・日の入地点の経度は？

緯度 a の日の出・日の入地点の公転軸系直交座標は，つぎのとおり (☞ 公転軸系直交座標：日出・日入の座標)：
3.3.1

a ≦ π/2 - n である a に対し，

日の出

$$x = \frac{-n_s\ a_s\ \tau_s\ \tau_c - n_c \tau_c \sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2 (\tau_c)^2}}{1 - (n_s)^2 (\tau_c)^2}$$

$$y = \begin{cases} \frac{\tau_s}{\tau_c} x & (\tau \neq \frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi) \\ -(a-n)_c & (\tau = \frac{1}{2}\pi) \\ (a+n)_c & (\tau = \frac{3}{2}\pi) \end{cases}$$

日の入

$$x = \frac{-n_s\ a_s\ \tau_s\ \tau_c + n_c \tau_c \sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2 (\tau_c)^2}}{1 - (n_s)^2 (\tau_c)^2}$$

$$y = \begin{cases} \frac{\tau_s}{\tau_c} x & (\tau \neq \frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi) \\ (a+n)_c & (\tau = \frac{1}{2}\pi) \\ -(a-n)_c & (\tau = \frac{3}{2}\pi) \end{cases}$$

そしてつぎが，自転軸系経度緯度と公転軸系直交座標の変換式：

$$a_s = -n_s\ y + n_c\ z$$
$$b_c = \frac{x}{a_c}$$

よって，緯度 a の日の出・日の入り地点の経度 b は，つぎのようになる：

a ≦ π/2 - n である a に対し，

日の出

$$b_c = \frac{-n_s\ a_s\ \tau_s\ \tau_c - n_c \tau_c \sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2 (\tau_c)^2}}{a_c\ (1 - (n_s)^2 (\tau_c)^2)}$$

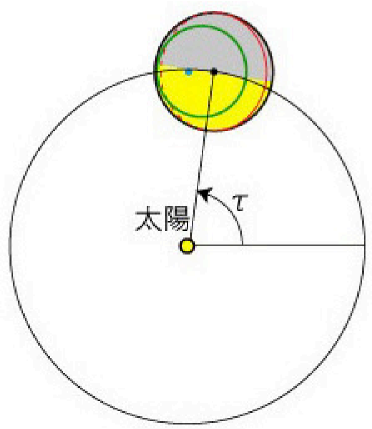
日の入

$$b_c = \frac{-n_s\ a_s\ \tau_s\ \tau_c + n_c \tau_c \sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2 (\tau_c)^2}}{a_c\ (1 - (n_s)^2 (\tau_c)^2)}$$

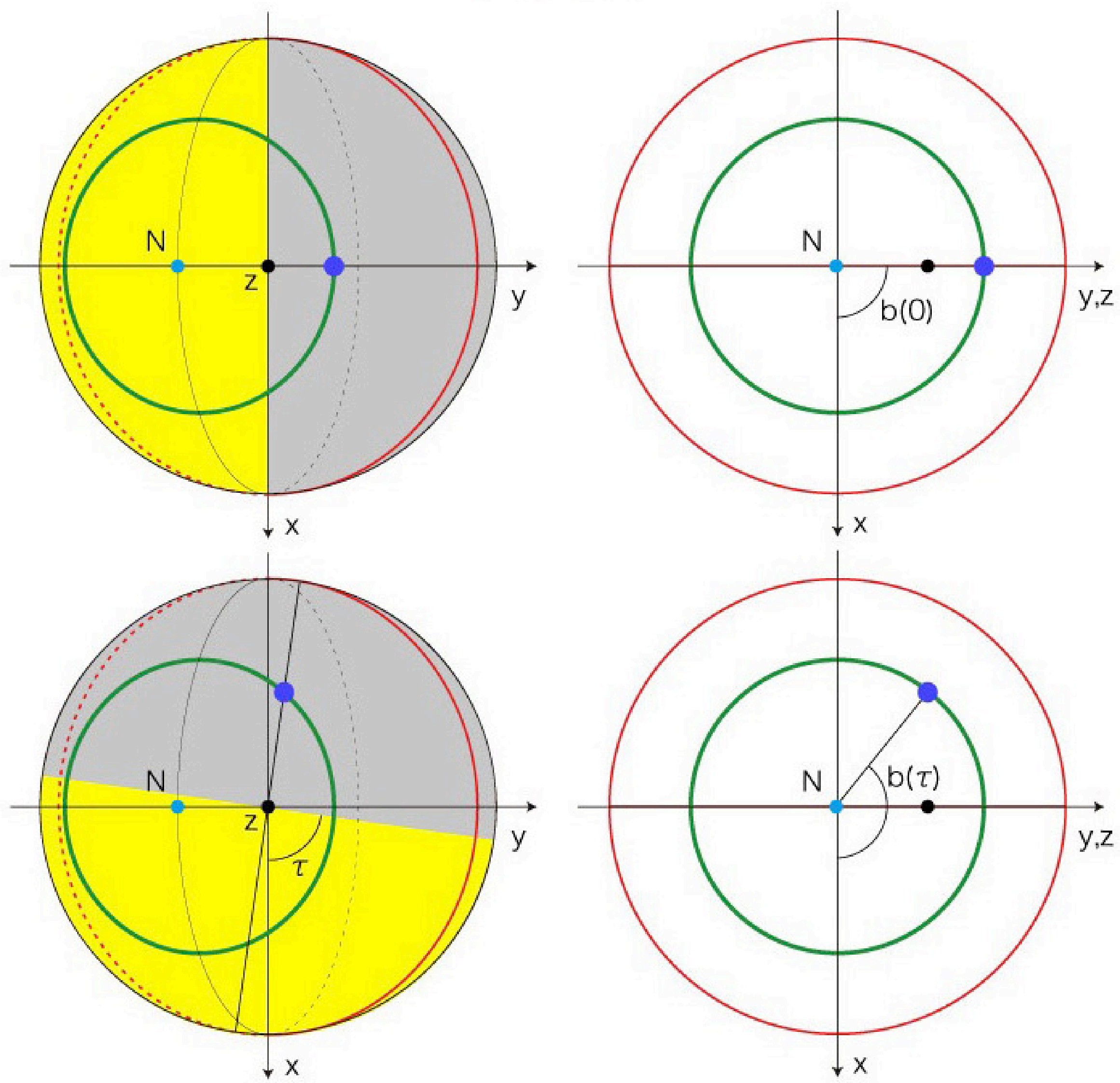
4.4　経度余弦方程式の解判定

4.4.1　解判定手順

緯度 a の日出/日入/正午点の経度は，公転角度 τ で決まる。
この経度を，$b(\tau)$ と表すことにする。



例：正午(夜)の場合

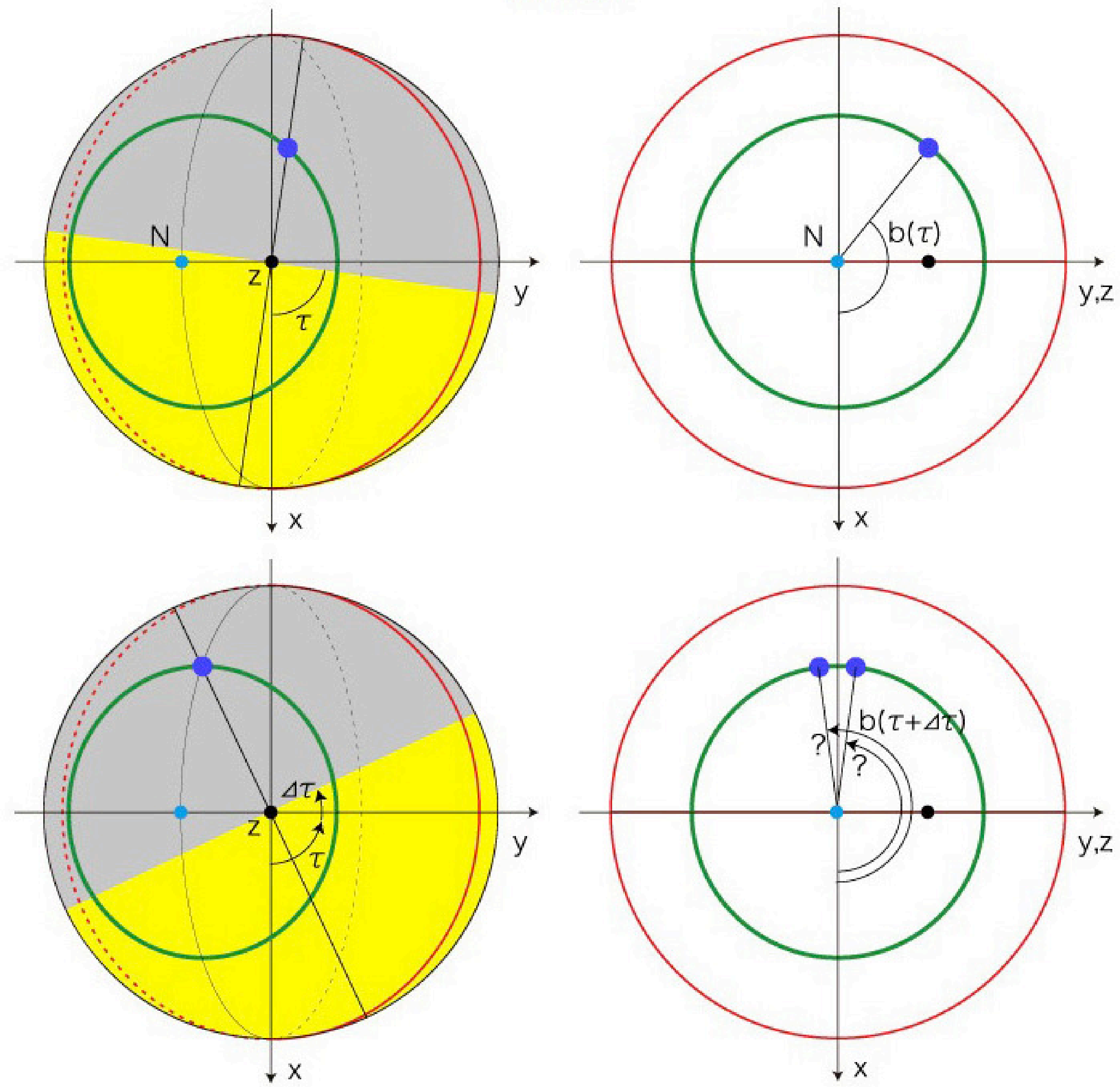


$b(\tau)$ は余弦方程式の解として計算され，解はつぎの３通りになる：

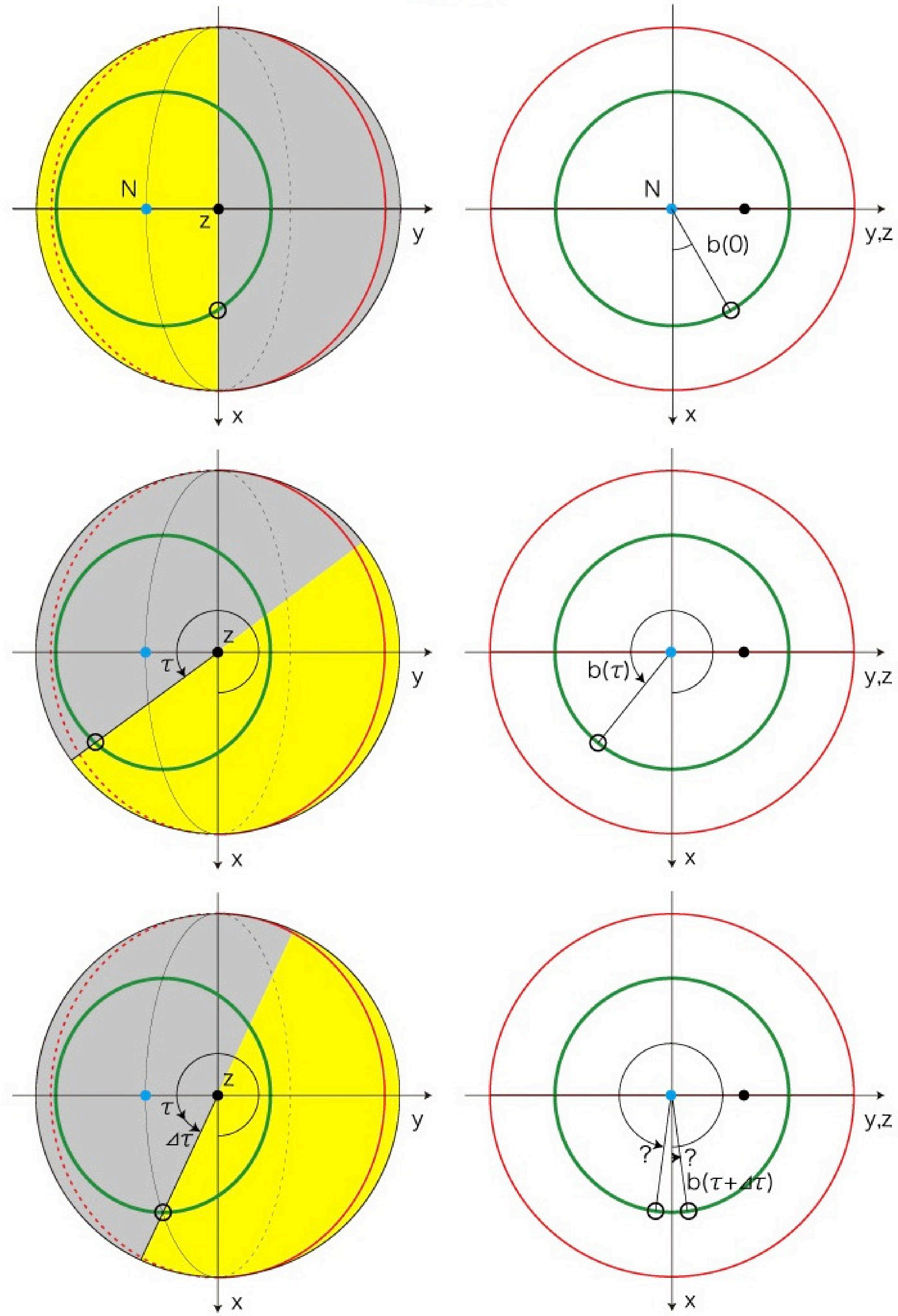
- $\cos(\, b(\tau)\,) = 1$ のとき，$b(\tau) = 0$
- $\cos(\, b(\tau)\,) = -1$ のとき，$b(\tau) = \pi$
- $\cos(\, b(\tau)\,) \neq \pm 1$ のとき，解は2つ：$0 < \alpha < \pi < 2\pi - \alpha < 2\pi$

２つの解 α，$2\pi - \alpha$ の場合，どちらが $b(\tau)$ であるのかの判別が問題になる。
実際，α が 0，π に近いときは，見た目では判別できない。

北中の場合



日出の場合



２つの解のどちらが適する解であるかの判別は，以下がこれの方法になる。

はじめに，

$$\cos(b(\tau_0)) = 1$$
$$\cos(b(\tau_\pi)) = -1$$

となる $\tau_0)$, τ_π を求める。

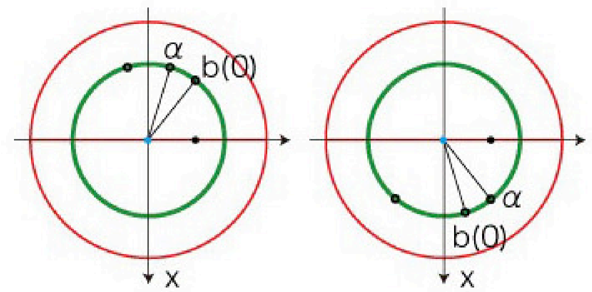
そして，つぎのように判定する：

(1) 0 < b(0) < π のとき

(1.1) b(0) < α のとき

(1.1.1) $\tau < \tau_\pi$ ならば，b(τ) ＝ α

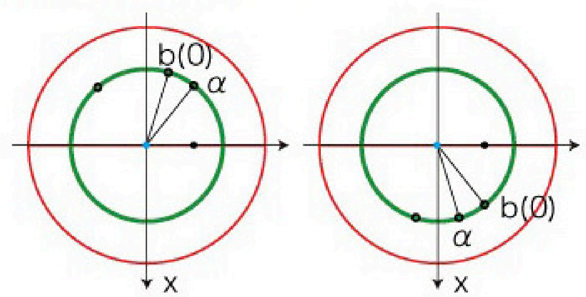
(1.1.2) $\tau > \tau_\pi$ ならば，b(τ) ＝ 2π−α



(1.2) α< b(0) のとき

(1.2.1) $\tau < \tau_0$ ならば，b(τ) ＝ 2π−α

(1.2.2) $\tau > \tau_0$ ならば，b(τ) ＝ α

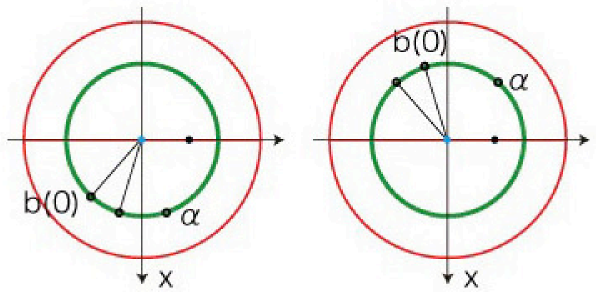


(2) π < b(0) < 2π のとき

(2.1) b(0) < 2π−α のとき

(2.1.1) $\tau < \tau_0$ ならば，b(τ) = 2π−α

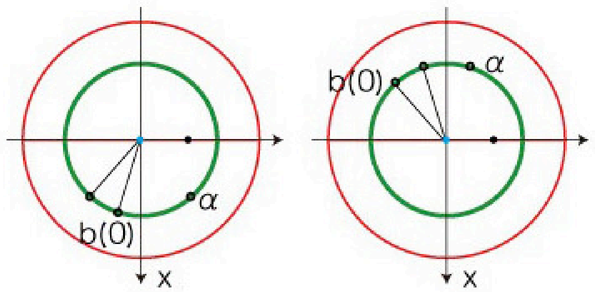
(2.1.2) $\tau > \tau_0$ ならば，b(τ) = α



(2.2) 2π−α < b(0) のとき

(2.2.1) $\tau < \tau_\pi$ ならば，b(τ) = α

(2.2.2) $\tau > \tau_\pi$ ならば，b(τ) = 2π−α



4.4.2　南中 / 日出 / 日入の経度が 0, π になるときの公転角度 τ_0, τ_π

公転角度 τ に対する τ_0, τ_π は，つぎの方程式の解である：

日出

$$cos(b(\tau)) = \frac{-n_s\, a_s\, \tau_s\, \tau_c - n_c \tau_c \sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2(\tau_c)^2}}{a_c\,(1-(n_s)^2(\tau_c)^2)}$$

$$cos(b(\tau_0)) = 1$$

$$cos(b(\tau_\pi)) = -1$$

日入

$$cos(b(\tau)) = \frac{-n_s\, a_s\, \tau_s\, \tau_c + n_c \tau_c \sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2(\tau_c)^2}}{a_c\,(1-(n_s)^2(\tau_c)^2)}$$

$$cos(b(\tau_0)) = 1$$

$$cos(b(\tau_\pi)) = -1$$

南中

$$cos(b(\tau)) = \frac{\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$

$$cos(b(\tau_0)) = 1$$

$$cos(b(\tau_\pi)) = -1$$

しかし， τ_0, τ_π が implicit なこの条件式から τ_0, τ_π を explicit に表す式を導くことは，できない。

よって，つぎが τ_0, τ_π を求める方法になる：

コンピュータで cos(b(τ)) (τ = 1, 2, ‥‥‥, 359) を計算して，

cos(b(τ)) が −1 に最も近くなる τ

cos(b(τ)) が 1 に最も近くなる τ

を，それぞれ τ_π, τ_0 とする。

☞ τ_0, τ_π 表

○ τ_0，τ_π 表

緯度	日出		日入		南中	
	τ_π	τ_0	τ_π	τ_0	τ_π	τ_0
30	13	167	193	347	270	90
31	13	167	193	347	270	90
32	14	166	194	346	270	90
33	14	166	194	346	270	90
34	15	165	195	345	270	90
35	16	164	196	344	270	90
36	16	164	196	344	270	90
37	17	163	197	343	270	90
38	17	163	197	343	270	90
39	18	162	198	342	270	90
40	18	162	198	342	270	90
41	19	161	199	341	270	90
42	20	160	200	340	270	90
43	20	160	200	340	270	90
44	21	159	201	339	270	90
45	22	158	202	338	270	90
46	22	158	202	338	270	90
47	23	157	203	337	270	90
48	24	156	204	336	270	90
49	25	155	205	335	270	90
50	25	155	205	335	270	90
51	26	154	206	334	270	90
52	27	153	207	333	270	90
53	28	152	208	332	270	90
54	29	151	209	331	270	90
55	30	150	210	330	270	90
56	30	150	210	330	270	90
57	31	149	211	329	270	90
58	32	148	212	328	270	90
59	33	147	213	327	270	90
60	35	145	215	325	270	90

以下に，この表を出力したコンピュータプログラム—— HTTP サーバと連携で実行する PHP プログラム——を示す：

```
";

/* 自転軸の傾き */
$n_degree = 23.4;
$n_radian = $n_degree * pi() / 180;
$n_s = sin( $n_radian );
$n_c = cos( $n_radian );


print "
        <table cellpadding=2><tr><td></td></tr></table>
        <table border=1 cellspacing=0 cellpadding=2>
        <tr>
        <td rowspan=2> 緯度 </td>
        <td colspan=2 align=center> 日出 </td>
        <td colspan=2 align=center> 日入 </td>
        <td colspan=2 align=center> 南中 </td>
        </tr>
        <tr>
        <td>τ<sub><font size=\"-1\">π</font></sub></td>
        <td>τ<sub><font size=\"-2\">0</font></sub></td>
        <td>τ<sub><font size=\"-1\">π</font></sub></td>
        <td>τ<sub><font size=\"-2\">0</font></sub></td>
        <td>τ<sub><font size=\"-1\">π</font></sub></td>
        <td>τ<sub><font size=\"-2\">0</font></sub></td>
        </tr>
";

for( $a_degree = 30; $a_degree < 61; $a_degree++ ){
/* 緯度 */

        $a_radian = $a_degree * pi() / 180;
        $a_s = sin( $a_radian );
        $a_c = cos( $a_radian );


/* 計算 */

        /* sunrise */
        $t_pi[0] = 0;
        $t_0[0] = 0;
        $max[0] = 0;
        $min[0] = 0;

        /* sunset */
        $t_pi[1] = 0;
        $t_0[1] = 0;
        $max[1] = 0;
        $min[1] = 0;

        /* midsun */
        $t_pi[2] = 0;
        $t_0[2] = 0;
        $max[2] = 0;
        $min[2] = 0;


        for( $i = 0; $i < 360; $i++ ){

                $t = $i * pi() / 180;
                $t_s = sin( $t );
                $t_c = cos( $t );
```

```
			for( $k = 0; $k < 3; $k++ ){

				switch( $k ){
					case 0 :
						$val = ( - $n_s * $a_s * $t_s * $t_c - $n_c * $t_c *
							sqrt( pow($a_c, 2) - pow($n_s * $t_c, 2) ) )
								/ (1 - pow($n_s * $t_c, 2) );
						break;

					case 1 :
						$val = ( - $n_s * $a_s * $t_s * $t_c + $n_c * $t_c *
							sqrt( pow($a_c, 2) - pow($n_s * $t_c, 2) ) )
								/ (1 - pow($n_s * $t_c, 2) );
						break;

					case 2 :
						$val = $t_s / sqrt ( 1 - pow( $n_s, 2 ) * pow( $t_c, 2 ) );
						break;
				}

				if( $val > $max[$k] ){
					$max[$k] = $val;
					$t_0[$k] = $i;
				}
				if( $val < $min[$k] ){
					$min[$k] = $val;
					$t_pi[$k] = $i;
				}

			}
		}

/* レコード書き出し */

		print "
		<tr>
		<td>".$a_degree."</td>
		";

		for( $k = 0; $k < 3; $k++ ){
			print "
		<td>".$t_pi[$k]."</td>
		<td>".$t_0[$k]."</td>
			";
		}

		print "
		</tr>
		";
}

print "
		</table>
```


4.5　正午

4.5.1　正午の座標

4.5.1　正午の座標

設定１

- 本テクストは，計算の簡単のため，＜夏至から夏至への時間＞が公転周期と等しいことにした。
  この時間を「年」とし，そしてこれを 365等分する時間を「日」とする。
  日を 24等分する時間を，「時間」とする。

- 地球は，365日で太陽を１周するので，１日の公転角度は 360/365度。
  逆に，１度の公転時間は，365/360 日。

- １年の始まりを決めたい。
  これを，夏至から＜193日と12時間＞後にする。
  そしてこの時点から，年をつぎのように区切って「月」を導入する：

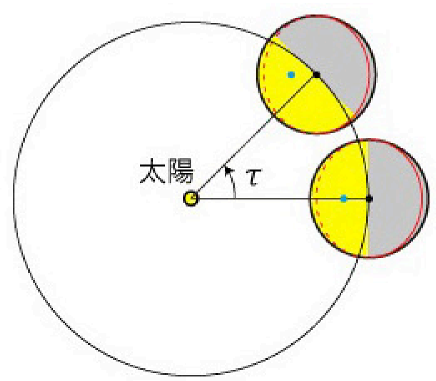
  　　１月は31日，２月は28日，‥‥‥，12月は31日

- １日の始まりの時刻を，「零時」と呼ぶ。
  そして零時から n（＜ 24）時間経った時刻を n 時と呼ぶ。

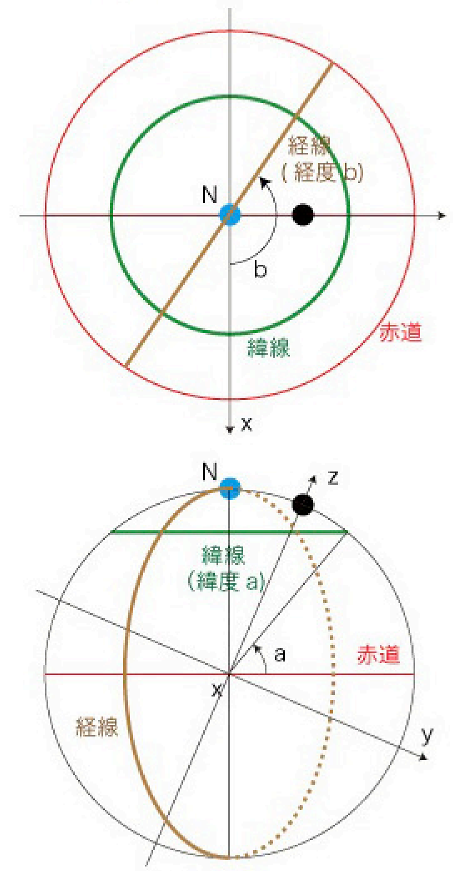
- ○月○日の12時を，「○月○日の正午」と呼ぶ。
  ○月○日正午の地点は，各緯度 a（≠ ±90°）に対し，ただ一つある。
  それを「○月○日の正午点」と呼ぶ。

設定２

- 「公転角度」を，つぎのように定める（基準を夏至にとる）：



- 地点の経度を，つぎのように定める：



地球は１年に（365＋１)回，360度回転をしていることになる。

「１年に（365＋１)回」の「＋１」にあたる 360度は，太陽１周の間に累積したものであるから，＜公転角度１度あたり１度＞の累積の結果である。
よって，

　　＜公転角度 τ の地球＞の正午点の経度（度）＝ 270＋ τ

また「１年に（365＋１)回」の「＋１」にあたる 360度は，１年365日の間に累積したものであるから，＜１日あたり 360/365 度＞の累積の結果である。
よって，

　　＜夏至から n 日後の地球＞の正午点の経度（度）＝ 270 ＋ n /365

１月１日を基準にした表現も，つくっておくとしよう。
１月１日の正午は，夏至の正午の 194日後。
１月１日の正午の n 日後の「○月○日の正午」は，夏至の正午の 195＋ n 日後。
よって，○月○日の正午点の経度 b（度）は，

　　b = 270 ＋ 360/365 × (195＋ n)

また，このときの地球の公転角度を τ（度）とすると，

　　b = 270 ＋ τ

よって，ｎとτがつぎの関係になる：

$$\tau = 360/365 \times (195 + n)$$

$$n = 365/360 \times \tau - 195$$

こうして，「正午点経度の年間変化表」につぎの２形が立つことになる：

月日正午 → 正午点経度 (付録：公転角度)
公転角度 → 正午点経度 (付録：月日)

月/日	公転角度	経度
1/1	192	102
1/6	197	107
1/11	202	112
1/16	207	117
1/21	212	122
1/26	217	127
1/31	222	132
2/5	227	137
2/10	232	142
2/15	237	147
2/20	242	152
2/25	247	157
3/2	252	162
3/7	256	166
3/12	261	171
3/17	266	176
3/22	271	181
3/27	276	186
4/1	281	191
4/6	286	196
4/11	291	201
4/16	296	206
4/21	301	211
4/26	306	216
5/1	311	221
5/6	316	226
5/11	321	231
5/16	326	236
5/21	330	240
5/26	335	245
5/31	340	250
6/5	345	255

公転角度	月/日	経度
0	6/20	270
5	6/25	275
10	6/30	280
15	7/5	285
20	7/10	290
25	7/15	295
30	7/20	300
35	7/25	305
40	7/31	310
45	8/5	315
50	8/10	320
55	8/15	325
60	8/20	330
65	8/25	335
70	8/30	340
75	9/4	345
80	9/9	350
85	9/14	355
90	9/19	0
95	9/24	5
100	9/29	10
105	10/4	15
110	10/10	20
115	10/15	25
120	10/20	30
125	10/25	35
130	10/30	40
135	11/4	45
140	11/9	50
145	11/14	55
150	11/19	60
155	11/24	65

6/10	350	260
6/15	355	265
6/20	0	270
6/25	5	275
6/30	10	280
7/5	15	285
7/10	20	290
7/15	25	295
7/20	30	300
7/25	35	305
7/30	40	310
8/4	44	314
8/9	49	319
8/14	54	324
8/19	59	329
8/24	64	334
8/29	69	339
9/3	74	344
9/8	79	349
9/13	84	354
9/18	89	359
9/23	94	4
9/28	99	9
10/3	104	14
10/8	109	19
10/13	113	23
10/18	118	28
10/23	123	33
10/28	128	38
11/2	133	43
11/7	138	48
11/12	143	53
11/17	148	58
11/22	153	63
11/27	158	68
12/2	163	73
12/7	168	78
12/12	173	83
12/17	178	88
12/22	183	93
12/27	187	97

160	11/29	70
165	12/4	75
170	12/9	80
175	12/14	85
180	12/20	90
185	12/25	95
190	12/30	100
195	1/4	105
200	1/9	110
205	1/14	115
210	1/19	120
215	1/24	125
220	1/29	130
225	2/3	135
230	2/8	140
235	2/13	145
240	2/18	150
245	2/23	155
250	2/28	160
255	3/6	165
260	3/11	170
265	3/16	175
270	3/21	180
275	3/26	185
280	3/31	190
285	4/5	195
290	4/10	200
295	4/15	205
300	4/20	210
305	4/25	215
310	4/30	220
315	5/5	225
320	5/10	230
325	5/16	235
330	5/21	240
335	5/26	245
340	5/31	250
345	6/5	255
350	6/10	260
355	6/15	265

以下に，この表を出力したコンピュータプログラム―― HTTP サーバと連携で実行する PHP プログラム――を示す：

```
";

/* 公転角度と月日の対応 ******************************************************/

$m_days[1] = 31;
$m_days[2] = 28;
$m_days[3] = 31;
$m_days[4] = 30;
$m_days[5] = 31;
$m_days[6] = 30;
$m_days[7] = 31;
$m_days[8] = 31;
$m_days[9] = 30;
$m_days[10] = 31;
$m_days[11] = 30;
$m_days[12] = 31;

/*  夏至 (6 月 20 日 ) */
$summer_solstice_mon = 6;
$summer_solstice_day = 20;

$mm = $summer_solstice_mon;
$dd = $summer_solstice_day;

for( $i = 0; $i < 365; $i++ ){

        $month[$i] = $mm;
        $day[$i] = $dd;

        if( $dd + 1 > $m_days[$mm] ){
                $dd = 1;
                if( $mm + 1 < 13 ){
                        $mm++;
                }
                else{
                        $mm = 1;
                }
        }
        else{
                $dd++;
        }
}


/******************************************************/

print "
正午点の経度の年間変化

<table><tr>
<td valign=top>

<table border=1 cellspacing=0>
<tr>
<td align=center>　月 / 日　</td>
<td align=center> 公転角度 </td>
<td align=center>　経度　</td>
</tr>
";

$skip = 5;
```



```
for( $i = 0; $i < 365; $i++ ){
        if( $i % $skip == 0 ){

                $n = $i + 195;
                if( $n >= 365 ){
                        $n = $n - 365;
                }

                $t = round( 360 * $n / 365, 1 );

                $b = 270 + $t;
                if( $b >= 360 ){
                        $b = $b - 360;
                }

                print "
<tr>
<td align=center>　".$month[$n]."/".$day[$n]."　</td>
<td align=center>　".round( $t, 0 )."　</td>
<td align=center>　".round( $b, 0 )."　</td>
</tr>";

        }
}
print "
</table>

</td>
<td>　　</td>
<!-- ■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■ -->
<td valign=top>

<table border=1 cellspacing=0>
<tr>
<td align=center> 公転角度 </td>
<td align=center>　月 / 日　</td>
<td align=center>　経度　</td>
</tr>
";

$skip = 5;

for( $t = 0; $t < 360; $t++ ){
        if( $t % $skip == 0 ){

                $b = 270 + $t;
                if( $b >= 360 ){
                        $b = $b - 360;
                }

                $n = 365 * $t / 360;
                $n = round( $n, 0 );

                print "
<tr>
<td align=center>　".$t."　</td>
<td align=center>　".$month[$n]."/".$day[$n]."　</td>
<td align=center>　".$b."　</td>
</tr>";

        }
}
print "
</table>

</td>
</tr></table>
```

5.　日影

5.1　南中影倍率から公転角度を求める計算

日時計で月日を知るとは，公転角度を知るということである。
「１年は365日」は「公転軌道一周の360度回転に365日」ということであるから，公転軌道を円と見なせば，概ね公転角度１度が１日と対応していることになる。
──実際，「度」の由来はこの対応に求めることになる。

公転角度は，南中時の影の長さから導くことができる。
実際，南中太陽の仰角余角を α とすると，地面に垂直に立てた棒の影の長さは，棒の長さの $\tan(\alpha)$ 倍である。
よって，影の長さから α を逆算できる。
そして公転角度 τ は，緯度 a での南中太陽の仰角余角 α とつぎの関係にある (☞ 南中太陽の高度)：

$$\alpha_c = a_c\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2} + n_s a_s \tau_c$$

この式から，τ の計算式が導かれる：

$$\begin{aligned}
&(a_c)^2(1-(n_s)^2(\tau_c)^2) = (\alpha_c - n_s a_s \tau_c)^2 \\
&\quad = (\alpha_c)^2 - 2\alpha_c n_s a_s \tau_c + (n_s)^2(a_s)^2(\tau_c)^2 \\
&\Longrightarrow \quad ((n_s)^2(a_s)^2 + (n_s)^2(a_c)^2)(\tau_c)^2 - 2\alpha_c n_s a_s \tau_c + (\alpha_c)^2 - (a_c)^2 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (n_s)^2(\tau_c)^2 - 2n_s a_s \alpha_c \tau_c + (\alpha_c)^2 - (a_c)^2 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \tau_c = \frac{n_s a_s \alpha_c \pm \sqrt{(n_s a_s \alpha_c)^2 - (n_s)^2((\alpha_c)^2 - (a_c)^2)}}{(n_s)^2}
\end{aligned}$$

そしてルートの中の計算が，

$$\begin{aligned}
&(n_s)^2(a_s)^2(\alpha_c)^2 - (n_s)^2(\alpha_c)^2 + (n_s)^2(a_c)^2 \\
&(n_s)^2((a_s)^2(\alpha_c)^2 - (\alpha_c)^2 + (a_c)^2) \\
&\ = (n_s)^2(-(a_c)^2(\alpha_c)^2 + (a_c)^2) \\
&\ = (n_s)^2(a_c)^2(\alpha_s)^2
\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}
\tau_c &= \frac{n_s a_s \alpha_c \pm n_s a_c \alpha_s}{(n_s)^2} \\
&= \frac{a_s \alpha_c \pm a_c \alpha_s}{n_s}
\end{aligned}$$

これをもとの式

$$\alpha_c = a_c\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2} + n_s a_s \tau_c$$

に代入すると，

$$\begin{aligned}
&1-(n_s)^2\left(\frac{a_s\alpha_c \pm a_c\alpha_s}{n_s}\right)^2 \\
&= 1-(a_s\alpha_c \pm a_c\alpha_s)^2 \\
&= ((a_s)^2+(a_c)^2) - (a_s)^2(\alpha_c)^2 \mp 2a_s\alpha_c a_c\alpha_s - (a_c)^2(\alpha_s)^2 \\
&= (a_s)^2 - (a_s)^2(\alpha_c)^2 \mp 2a_s a_c \alpha_s \alpha_c + (a_c)^2 - (a_c)^2(\alpha_s)^2 \\
&= (a_s)^2(\alpha_s)^2 \mp 2a_s a_c \alpha_s \alpha_c + (a_c)^2(\alpha_c)^2 \\
&= (a_s\alpha_s \mp a_c\alpha_c)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \alpha_c = a_c(a_s\alpha_s \mp a_c\alpha_c) + n_s a_s \frac{a_s\alpha_c \pm a_c\alpha_s}{n_s} \\
&\qquad\quad = a_s a_c \alpha_s \mp (a_c)^2\alpha_c + (a_s)^2\alpha_c \pm a_s a_c \alpha_s
\end{aligned}$$

等式を成り立たせるのは，つぎの方である：

$$\tau_c = \frac{a_s\alpha_c - a_c\alpha_s}{n_s}$$

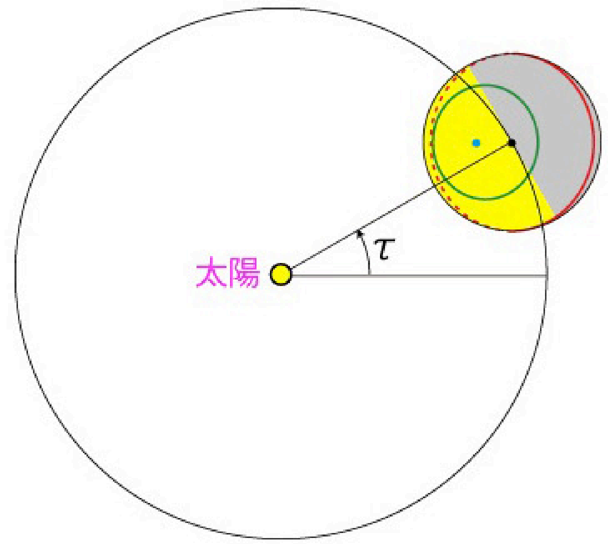
まとめ
緯度 a の南中太陽において《ポールの高さの r 倍が影の長さ》であるとき，公転角度 τ は，

$$\begin{aligned}
&\tau_c = \frac{a_s\alpha_c - a_c\alpha_s}{n_s} \\
&\alpha = tan^{-1}\, r
\end{aligned}$$

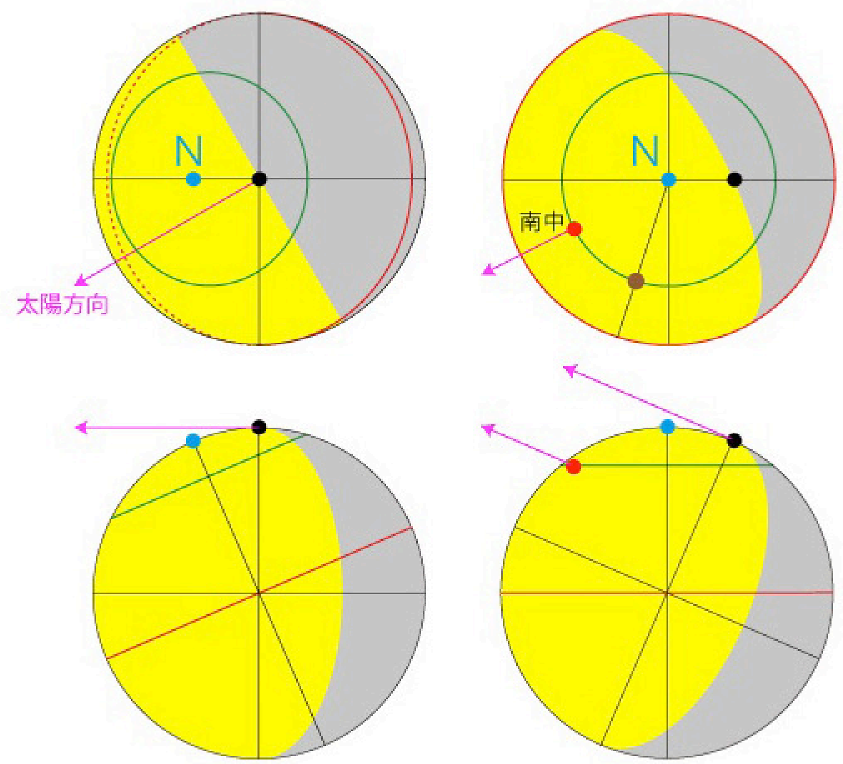
5.2　日影移動

5.2.1　日影移動の幾何

地球がつぎの位置にあるとする：

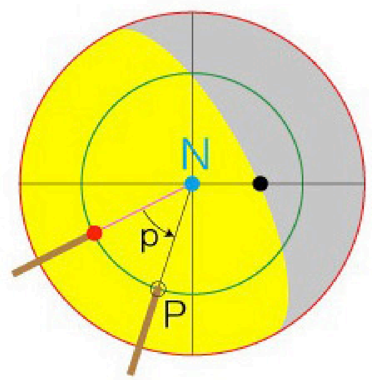


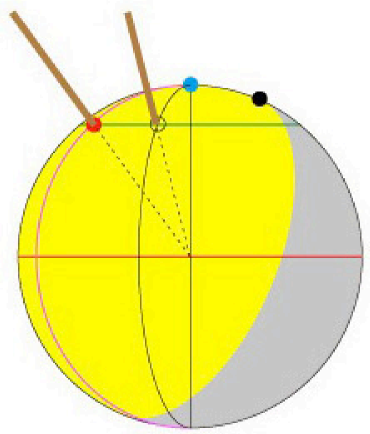
このときの太陽の方向は，



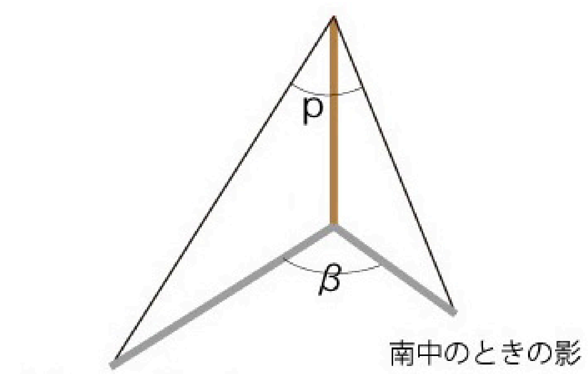
棒を平地に垂直に立てる。
(「平地」の意味は，地球の中心と棒を立てる点を結ぶ直線に対し，垂直。)

南中時の棒の影を，地面に刻む。
つぎに，南中時から地球が角度ｐだけ自転したときの棒の影を，地面に刻む。



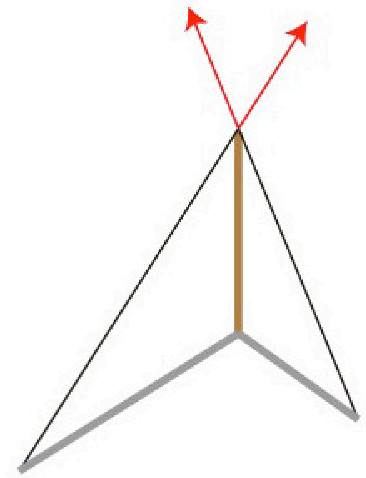


２つの影の跡がつくる角の大きさを，βとする。
βは，計算しなければ求まらない。(☞ 日影移動の計算)
しかし，棒の先端とこれの２つの影跡をつないでできる角の大きさは，ｐであることがわかる。

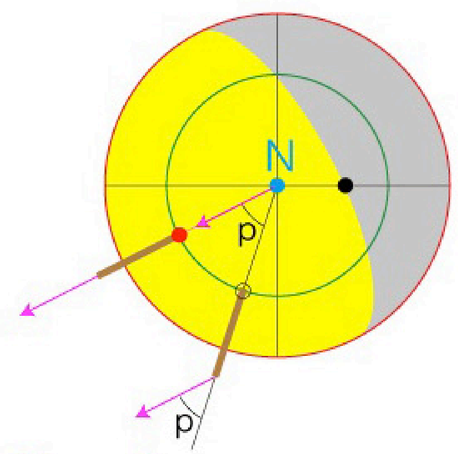


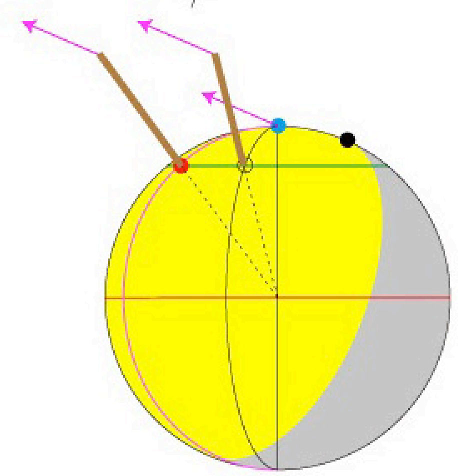
なぜなら，

1. 棒の先端からこれの影跡への方向は，棒の先端から太陽への方向と正反対。



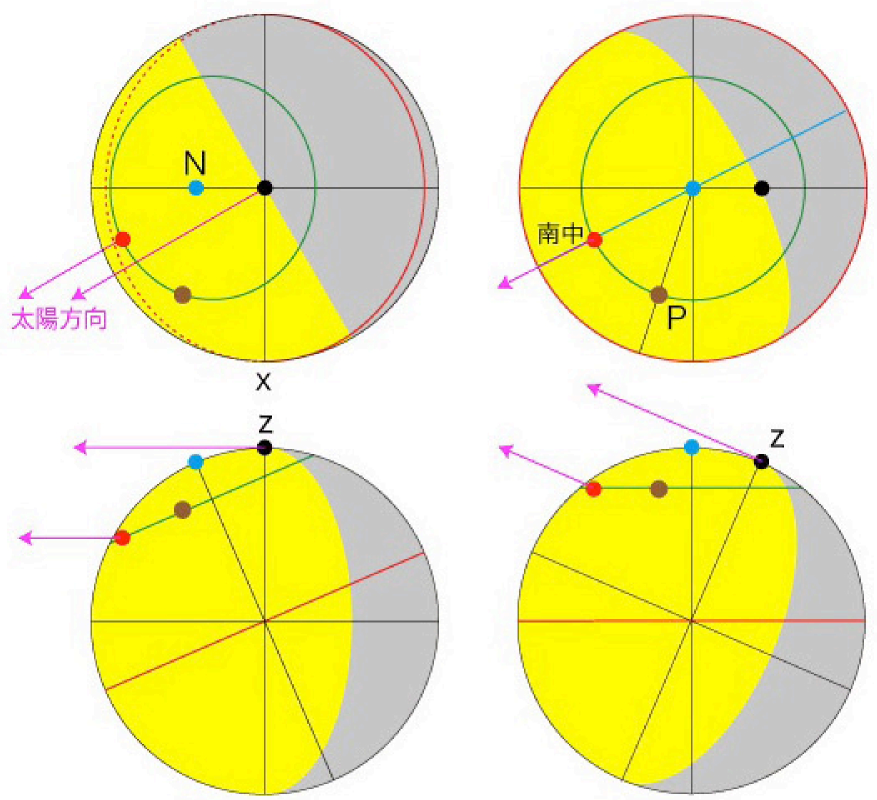
2. 棒の先端から太陽への方向は，自転の極Nから太陽への方向。





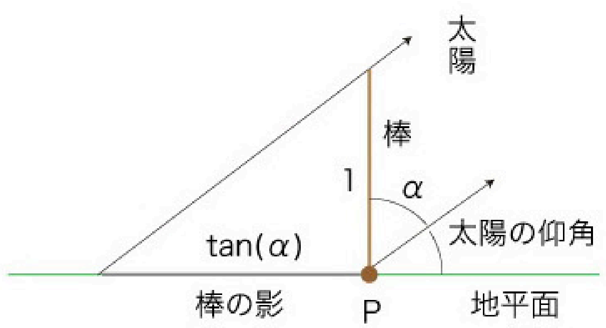
5.2.2　日影移動の計算

緯度ａにおいて，点Ｐが地球の自転により，南中点の経度ｓから経度ｂに移動した：



Ｐには，地平面に垂直に棒を立てられている。
棒の長さの数値を１とする。

緯度ｓでの太陽の仰角余角を α_s とし，経度ｂでの仰角余角を α_b とする。
経度ｓでは地平面上に長さ $tan(\alpha_s)$ の影ができ，経度ｂでは長さ $tan(\alpha_b)$ の影ができる。
その影を，それぞれ地面に刻んで記録する。



ここで，南中点の経度ｓは，n, τ, a によって，つぎのように表される。（☞ 南中点の経度計算式）：

$$cos(s) = \frac{\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$

そして α_s が，つぎのように表される。（☞ 南中太陽の高度）：

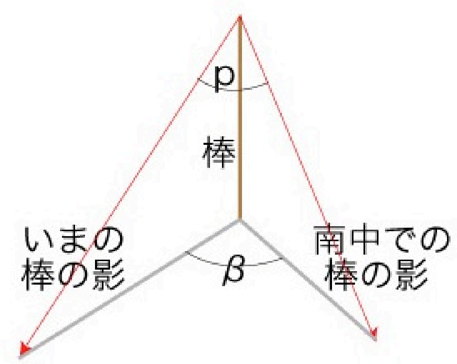
$$cos(\alpha_s) = a_c\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2} + n_s a_s \tau_c$$

α_b は，つぎのように表される。（☞ 緯度ａ経度ｂで見る太陽の高度）：

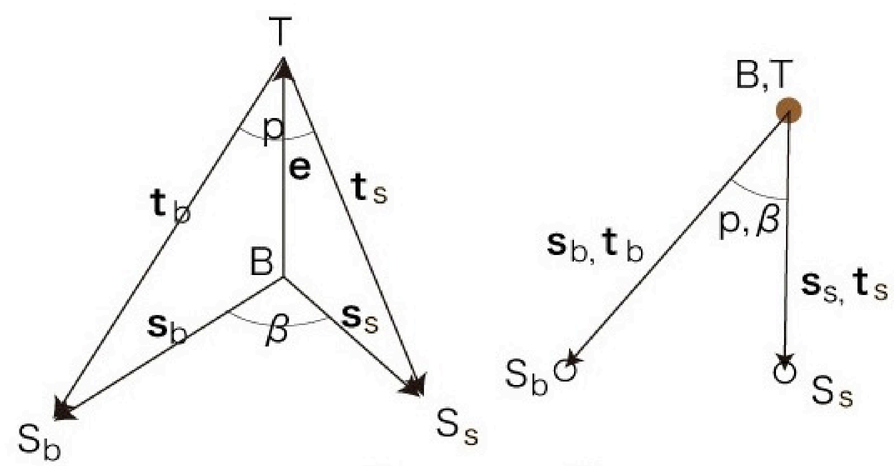
$$cos(\alpha_b) = a_c \tau_s \, b_c - n_c a_c \tau_c \, b_s + n_s a_s \tau_c$$

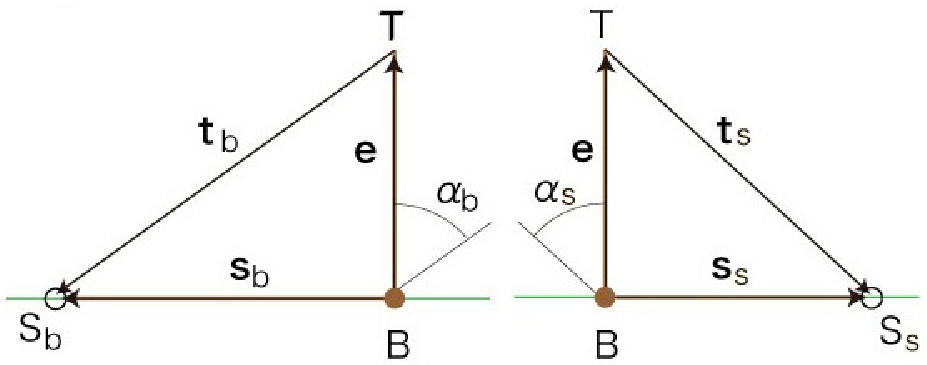
Ｐが南中点にあったときの影といまの影のなす角度を β とする。
β は，n, τ, a, b で表されるはずである。
この式を求める。

ｂとｓの差をｐとすると，ｐと β がつぎの関係になる：

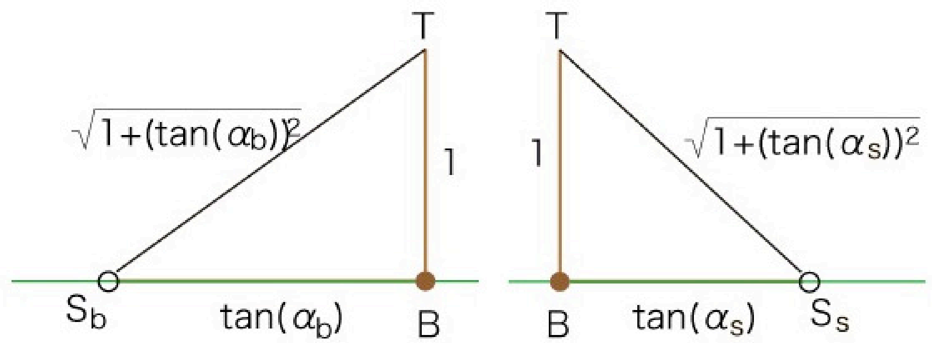


ベクトルをつぎのように定める：





つぎの長さの関係がある：



よって，

$$
\begin{aligned}
cos(p) &= \frac{\mathbf{t}_b \cdot \mathbf{t}_s}{|\mathbf{t}_b|\ |\mathbf{t}_s|} \\
&= \frac{(\mathbf{s}_b - \mathbf{e}) \cdot (\mathbf{s}_s - \mathbf{e})}{|\mathbf{t}_b|\ |\mathbf{t}_s|} \\
&= \frac{\mathbf{s}_b \cdot \mathbf{s}_s - \mathbf{s}_b \cdot \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{s}_s + \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}}{\sqrt{1+(tan(\alpha))^2}\ \sqrt{1+(tan(\alpha_s))^2}} \\
&= \frac{|\mathbf{s}_b||\mathbf{s}_s|cos(\beta) - 0 - 0 + 1}{\sqrt{\frac{1}{(cos(\alpha))^2}}\sqrt{\frac{1}{(cos(\alpha_s))^2}}} \\
&= (tan(\alpha)tan(\alpha_s)cos(\beta)+1)cos(\alpha)cos(\alpha_s) \\
&= sin(\alpha)sin(\alpha_s)cos(\beta) + cos(\alpha)cos(\alpha_s)
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \ cos(\beta) = \frac{cos(p) - cos(\alpha)cos(\alpha_s)}{sin(\alpha)sin(\alpha_s)}
$$

ここまでのまとめ

$$
\begin{aligned}
cos(\beta) &= \frac{cos(b-s) - cos(\alpha_b)cos(\alpha_s)}{sin(\alpha_b)sin(\alpha_s)} \\
cos(s) &= \frac{\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} \\
cos(\alpha_s) &= a_c\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2} + n_s a_s \tau_c \\
cos(\alpha_b) &= a_c \tau_s\ b_c - n_c a_c \tau_c\ b_s + n_s a_s \tau_c
\end{aligned}
$$

---

k 時の経度を b_k，影と南中の影のなす角を β_k，そして太陽の仰角余角を α_k とする。
このとき，

$$
\begin{aligned}
cos(\beta_k) &= \frac{cos(b_k - s) - cos(\alpha_k)cos(\alpha_s)}{sin(\alpha_k)sin(\alpha_s)} \\
cos(\alpha_k) &= a_c \tau_s\ (b_k)_c - n_c a_c \tau_c\ (b_k)_s + n_s a_s \tau_c
\end{aligned}
$$

正午の経度を Mb とすると，

$$
\begin{aligned}
Mb &= \frac{3}{2}\pi + \tau \\
b_k &= Mb + (15 \times (k - 12))
\end{aligned}
$$

まとめ

$$
\begin{aligned}
cos(\beta_k) &= \frac{cos(b_k - s) - cos(\alpha_k)cos(\alpha_s)}{sin(\alpha_k)sin(\alpha_s)} \\
cos(\alpha_k) &= a_c \tau_s\ (b_k)_c - n_c a_c \tau_c\ (b_k)_s + n_s a_s \tau_c \\
b_k &= \frac{3}{2}\pi + \tau + (15 \times (k-12)) \\
cos(s) &= \frac{\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}} \\
cos(\alpha_s) &= a_c\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2} + n_s a_s \tau_c
\end{aligned}
$$

年

理論検証

6　秋分の太陽——観測値との照合
(2020-09-21)

6.　秋分の太陽——観測値との照合
(2020-09-21)

6.1「秋分」の理論値

6.1.1　日出・日入

(1) 太陽の方向

太陽方向ベクトルは，つぎの通り (☞ 太陽の方向) :

$$\mathbf{s} = (\tau_s,\ -\tau_c,\ 0)$$

秋分は，$\tau = \pi/2$ なので，

$$\mathbf{s} = (1,\ 0,\ 0)$$

(2) 太陽の高度

公転角度が τ のとき，緯度 a，経度 b の点での太陽の仰角余角 α は，つぎの通り (☞ 太陽の高度) :

$$cos(\alpha) = a_c\tau_s\, b_c - n_c a_c\tau_c\, b_s + n_s a_s \tau_c$$

秋分は，$\tau = \pi/2$ ── $\tau_s = 1,\ \tau_c = 0$ ──なので，

$$cos(\alpha) = a_c\, b_c$$

(3) 太陽の方角

公転角度 τ，緯度a，経度 b では，つぎのベクトル $\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_y)$ が太陽方角ベクトルになる (☞ 太陽の方角) :

$$\begin{aligned} d_x = &-\tau_s(a_c)^2(b_c)^2 \\ &+\tau_c n_c(a_c)^2 b_s b_c \\ &-\tau_c n_s a_s a_c b_c + \tau_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_y = &\ \tau_c(n_c)^2(a_c)^2(b_s)^2 \\ &-\tau_s n_c(a_c)^2 b_s b_c \\ &-2\tau_c n_s n_c a_s a_c b_s \\ &+\tau_s n_s a_s a_c b_c \\ &+\tau_c(n_s)^2(a_s)^2 - \tau_c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_z = &\ \tau_c n_s n_c a_c^2 b_s^2 \\ &-\tau_s n_s a_c^2 b_s b_c \\ &+\tau_c(n_c^2 - n_s^2) a_s a_c b_s \\ &-\tau_s n_c a_s a_c b_c \\ &-\tau_c n_s n_c a_s^2 \end{aligned}$$

$$|\mathbf{d}| = \sqrt{1 - (a_c(n_c\tau_c b_s - \tau_s b_c) - n_s a_s \tau_c)^2}$$

6.1.2 太陽の方向，高度，方角

(1) 太陽の方向

太陽方向ベクトルは，つぎの通り (☞ 太陽の方向)：

$$\mathbf{s} = (\tau_s,\ -\tau_c,\ 0)$$

秋分は，$\tau = \pi/2$ なので，

$$\mathbf{s} = (1,\ 0,\ 0)$$

(2) 太陽の高度

公転角度が τ のとき，緯度ａ, 経度ｂの点での太陽の仰角余角 α は，つぎの通り (☞ 太陽の高度)：

$$cos(\alpha) = a_c\tau_s\ b_c - n_c a_c \tau_c\ b_s + n_s a_s \tau_c$$

秋分は，$\tau = \pi/2$ —— $\tau_s = 1,\ \tau_c = 0$ ——なので，

$$cos(\alpha) = a_c\ b_c$$

(3) 太陽の方角

公転角度 τ，緯度a，経度ｂでは，つぎのベクトル $\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_y)$ が太陽方角ベクトルになる (☞ 太陽の方角)：

$$\begin{aligned} d_x &= -\tau_s (a_c)^2 (b_c)^2 \\ &\quad + \tau_c n_c (a_c)^2 b_s b_c \\ &\quad - \tau_c n_s a_s a_c b_c + \tau_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_y &= \tau_c (n_c)^2 (a_c)^2 (b_s)^2 \\ &\quad - \tau_s n_c (a_c)^2 b_s b_c \\ &\quad - 2\tau_c n_s n_c a_s a_c b_s \\ &\quad + \tau_s n_s a_s a_c b_c \\ &\quad + \tau_c (n_s)^2 (a_s)^2 - \tau_c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_z &= \tau_c n_s n_c a_c^2 b_s^2 \\ &\quad - \tau_s n_s a_c^2 b_s b_c \\ &\quad + \tau_c (n_c^2 - n_s^2) a_s a_c b_s \\ &\quad - \tau_s n_c a_s a_c b_c \\ &\quad - \tau_c n_s n_c a_s^2 \end{aligned}$$

$$|\mathbf{d}| = \sqrt{1 - (a_c(n_c\tau_c b_s - \tau_s b_c) - n_s a_s \tau_c)^2}$$

秋分は，$\tau = \pi/2$ —— $\tau_s = 1,\ \tau_c = 0$ ——なので，

$$\begin{aligned} d_x &= -a_c^2 b_c^2 + 1 \\ d_y &= -n_c a_c^2 b_s b_c + n_s a_s a_c b_c \\ d_z &= n_s a_c^2 b_s b_c - n_c a_s a_c b_c \\ |\mathbf{d}| &= \sqrt{1 - (a_c(-b_c))^2} \\ &= \sqrt{1 - (a_c)^2 (b_c)^2} \end{aligned}$$

6.1.3　南中の座標，南中太陽の高度

(1) 南中の座標

秋分の南中の経度は，０である。

一般に経度を求める計算式は，つぎの通り（☞ 南中の座標)：

$$b_c = \frac{\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$

$$b_s = \frac{-n_c\tau_c}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$

検算として秋分の場合 ── $\tau = \pi/2,\ \tau_s = 1,\ \tau_c = 0$ ──を計算すると：

$$b_c = 1$$
$$b_s = 0$$

確かに b = 0 が得られる。

(2) 南中太陽の高度

公転角度が τ のときの緯度 a での太陽仰角余角 α は，つぎの通り（☞ 太陽の高度)：

$$\alpha_c = a_c\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2} + n_s a_s \tau_c$$

秋分は，$\tau = \pi/2$ ── $\tau_s = 1,\ \tau_c = 0$ ──なので，

$$\alpha_c = a_c$$

よって，$\alpha = a$ である。

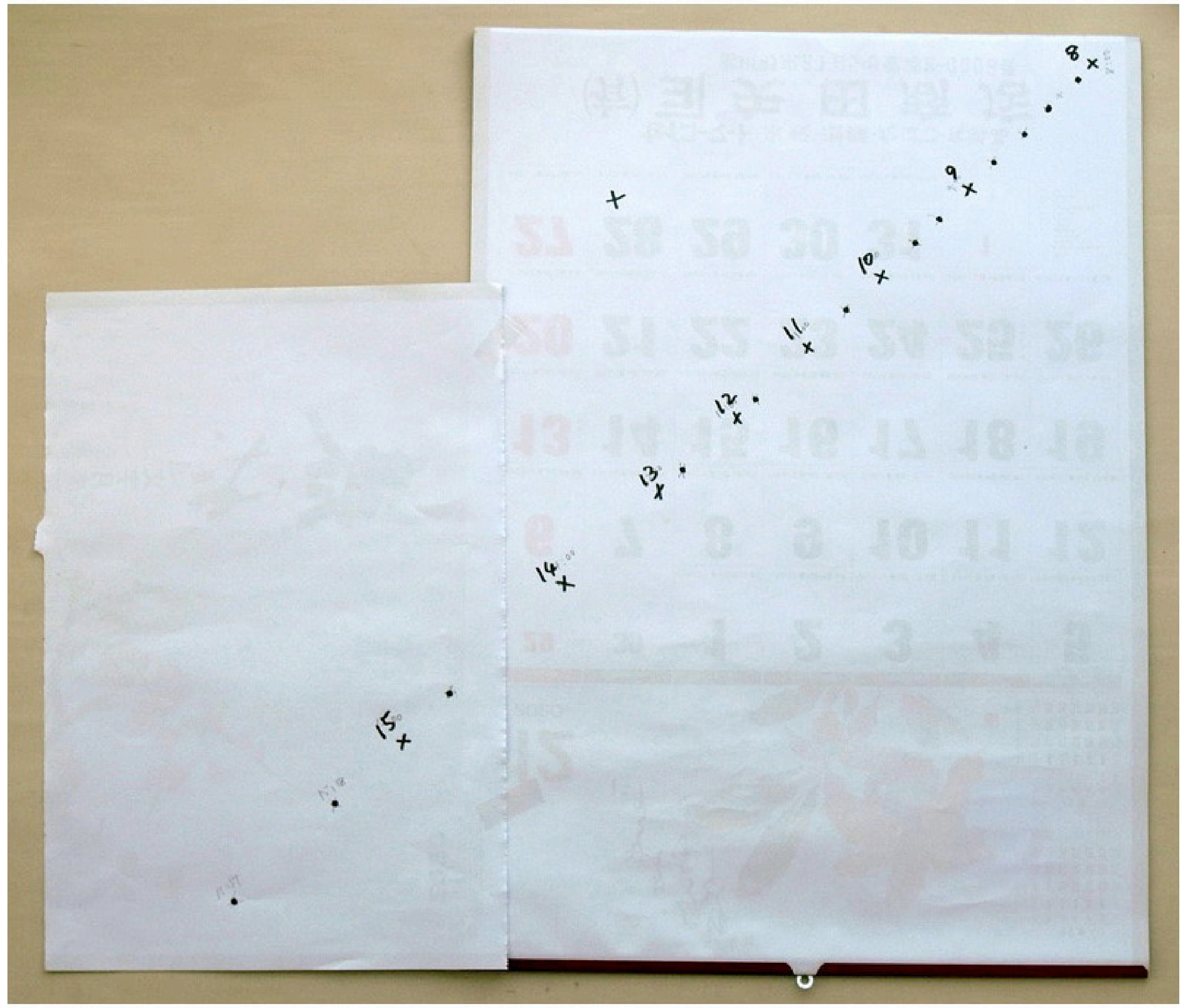
6.2　観測と考察

6.2.1　観測

ロジックで導いた「太陽の挙動」が実際と合っているかどうかを見るため，
2020-09-21 (「秋分の日」の前日) に，これを調べた。

方法は，紙の上にアクリルの箱をのせ，直立した辺 (高さ 16 cm) の影の先端を，
紙に鉛筆でマークしていくというもの：

水平・垂直のチェックもしない雑駁なやり方であるが，つぎの結果を得た：



この結果について，以下考察する。
なお，「例：秋分」で導いた諸命題を，この考察の随所で用いる。

6.2.2 影の移動

影の長さが最短になる南中は，記録図面では日本標準時で 11:20 頃。

影の移動は，理論値ではつぎのようになる (☞ 日時計)：

時	南中との経度差	南中時の影との角度
7	-75	-80
8	-60	-69
9	-45	-56
10	-30	-41
11	-15	-22
12	0	0
13	15	22
14	30	41
15	45	56
16	60	69
17	75	80

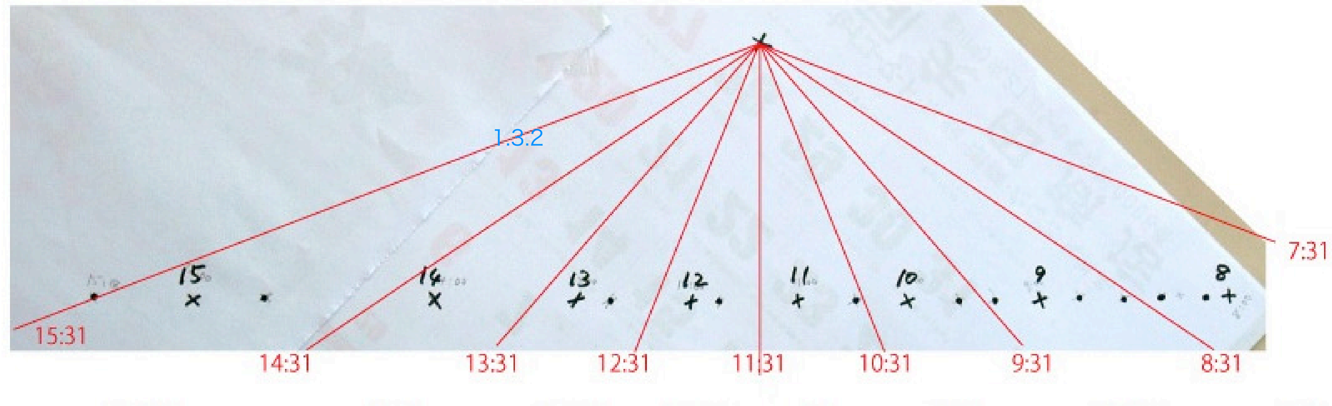
ここで時刻は，観測地の時刻である。
観測地は日本標準時子午線の東にあり，標準時との時差が 29分。
よって上の表は，標準時で書くとつぎのようになる：

時	南中との経度差	南中時の影との角度
6:31	-75	-80
7:31	-60	-69
8:31	-45	-56
9:31	-30	-41
10:31	-15	-22
11:31	0	0
12:31	15	22
13:31	30	41
14:31	45	56
15:31	60	69
16:31	75	80

考え方：
当地時を T，このときの標準時を T_0 とする。
当地と同緯度の標準時地は t = 29分 後に，太陽に関する当地のいまの位相に なるから，

$$\begin{aligned} & T_0 + t = T \\ \Longrightarrow\ & T_0 = T - t \end{aligned}$$

そしてこれを記録図面に重ねてみると，つぎのようになる：



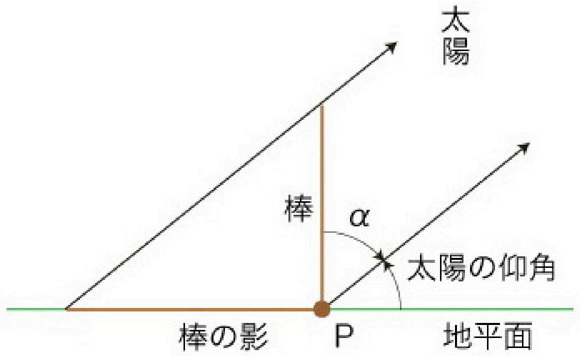
時刻が，理論値から10分ほどズレている。
原因を観測が雑であることと見て，そのうち装置の精度を高くして再観測することを期す。

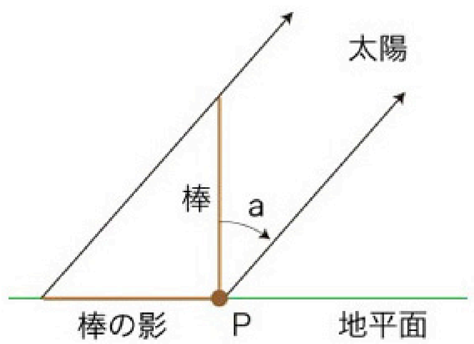
6.2.3　影の長さ

南中から経度差ｂのとき，太陽の仰角余角αは，

$$cos(\alpha) = cos(a)cos(b)$$

そして仰角余角αのとき，棒の影の長さは，棒の長さの tan(α) 倍。
南中のときは，仰角余角が緯度ａと等しいので，影の長さは 棒の長さの tan(ａ) 倍。





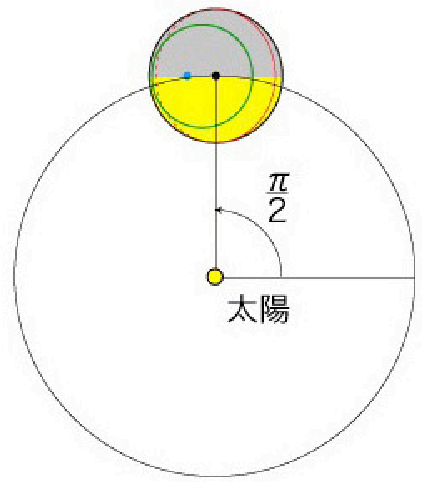
これを計算すると，つぎのようになる (経度15度間隔は１時間間隔と対応している)：

東経ｂ(度)	α(度)	影の長さ(cm)
0	43	14.7
15	45	15.8
30	50	19.3
45	59	26.2
60	68	40.3
75	79	82.3

観測値も，だいたいこのようになった。
もっとも，観測での影の長さの最短が 13.5 cm というふうに，厳密には理論値との開きがある。
ただし，影の先端はぼやけるので 5mm 幅の誤差は出る。水平・垂直の設定も行っていない。
そのうち，装置の精度を高くして再観測することを期す。

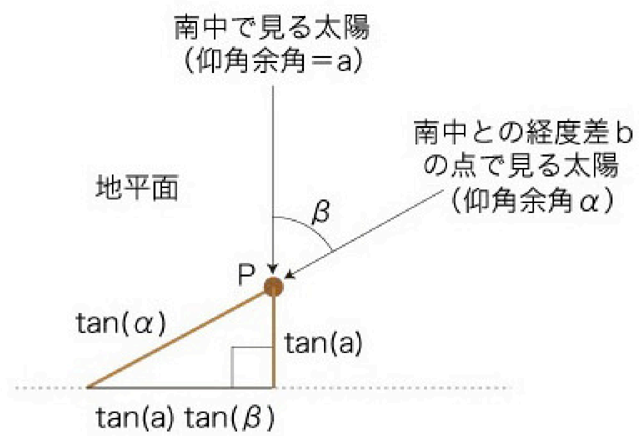
6.2.4　影の先端の軌跡が直線？

影の先端の軌跡が直線のようになったが，一般にはこうならない。
夏至を考えればわかる――夏至には真東・真西で太陽が上空にあり，このとき棒の影がそれぞれ棒の真西と真東に現れる。
直線のようになるのは，秋分に理由があるということになる。



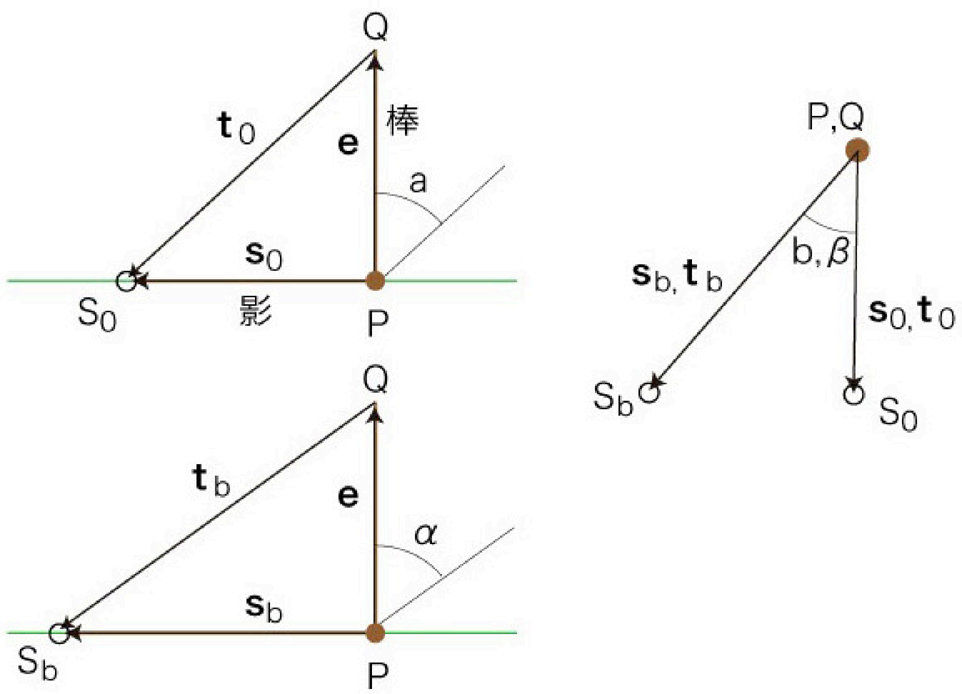
そしてもし理由づけられるとすれば，それはつぎが成り立っているということである：

$$tan(\alpha)\ cos(\beta) = tan(a)$$

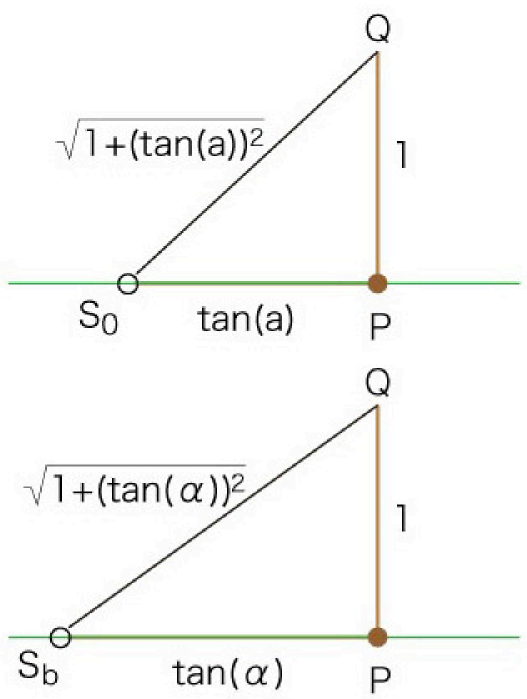


さて，実際はどうなのか？
以下，推論する。

つぎのようにベクトルを定める：



棒の長さを 1 とすると，つぎの長さの関係になる：



このとき

$$
\begin{aligned}
cos(b) &= \frac{\mathbf{t}_b \cdot \mathbf{t}_0}{|\mathbf{t}_b|\ |\mathbf{t}_0|} \\
&= \frac{(\mathbf{s}_b - \mathbf{e}) \cdot (\mathbf{s}_0 - \mathbf{e})}{|\mathbf{t}_b|\ |\mathbf{t}_0|} \\
&= \frac{\mathbf{s}_b \cdot \mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_b \cdot \mathbf{e}_0 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{s}_0 + \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}}{\sqrt{1 + (tan(\alpha))^2}\sqrt{1 + (tan(a))^2}} \\
&= \frac{|\mathbf{s}_b||\mathbf{s}_0|cos(\beta) - 0 - 0 + 1}{\sqrt{\frac{1}{(cos(\alpha))^2}}\sqrt{\frac{1}{(cos(a))^2}}} \\
&= (tan(\alpha)tan(a)cos(\beta) + 1)cos(\alpha)cos(a) \\
&= sin(\alpha)sin(a)cos(\beta) + cos(\alpha)cos(a) \\
&= sin(\alpha)sin(a)cos(\beta) + (cos(a)cos(b))cos(a)
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
cos(\beta) &= \frac{cos(b) - (cos(a))^2 cos(b)}{sin(\alpha)sin(a)} = \frac{(sin(a))^2 cos(b)}{sin(\alpha)sin(a)} \\
&= \frac{sin(a)cos(b)}{sin(\alpha)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
tan(\alpha)cos(\beta) &= \frac{sin(a)cos(b)}{cos(\alpha)} = \frac{sin(a)cos(b)}{cos(a)cos(b)} = \frac{sin(a)}{cos(a)} \\
&= tan(a)
\end{aligned}
$$

所期の結果となった！

6.2.5 影の先端の移動速度

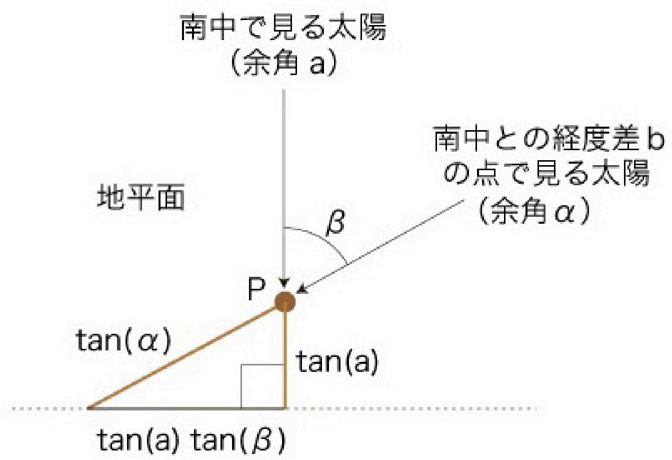
上の推論の中で，つぎが導かれた：

同緯度において，＜南中から経度ｂのところ＞で見る影は，南中のときに見る影と，つぎの角度βをなす：

$$cos(\beta) = \frac{sin(a)cos(b)}{\sqrt{1-(cos(a)cos(b))^2}}$$

そこで，経度ｂに対する影の移動が，つぎの式で求まる：

$$tan(a)tan(\beta)$$



tan(a) tan(β) を計算すると：

$$\begin{aligned}
(sin(\beta))^2 &= 1-(cos(\beta))^2 \\
&= 1-\frac{(sin(a))^2(cos(b))^2}{1-(cos(a)cos(b))^2} \\
&= \frac{1-(cos(a)cos(b))^2-(sin(a))^2(cos(b))^2}{1-(cos(a)cos(b))^2} \\
&= \frac{1-(cos(b))^2}{1-(cos(a)cos(b))^2} \\
&= \frac{(sin(b))^2}{1-(cos(a)cos(b))^2}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad tan(\beta) = \frac{sin(b)}{sin(a)cos(b)}$$

$$\Longrightarrow \quad tan(a)tan(\beta) = tan(a)\frac{sin(b)}{sin(a)cos(b)} = \frac{sin(b)}{cos(a)cos(b)}$$

「南中から n 時間経過」は「南中から経度 15×n 度移動」になる。
棒の長さ16cm に対して，南中の時からの影の移動を計算すると：

東経ｂ(度)	太陽の方角(度)	太陽の仰角(度)	影の移動(cm)
0	0	47	0
15	22	45	5.8
30	41	40	12.5
45	56	31	21.7
60	69	22	37.6
75	80	11	81

実験値をこれと比べると，ほぼピッタリ合っている。
よって，これまでの理論構築 (論理計算) は妥当であると結論できる。

年

応用

7.　年表作成プログラム

8.　＜日出・南中・日入＞年表

9.　＜日影＞年表

10.　日時計

7.　年表作成プログラム

7.1　汎用モジュールをつくる

「応用」として本テクストが示す年表各種は，コンピュータプログラムで作成する。
このプログラムは，内容において共通する部分が多い。
そこで，つぎがプログラミングの考え方になる：

＜汎用モジュール＋特個モジュール＞の構成で，プログラムをつくる。

特個モジュールは，小さいほどプログラムを書くのがラクになる。
そこで，つぎがプログラミングの考え方に加わる：

作成しようとする表にとって必要のない項目の計算をすることになっても，
汎用モジュールを十分大きくする。

ここでは，汎用モジュールとしてつぎの２つを作成する：

- モジュールA
  これは，緯度を固定して，公転角度に対応するつぎの値をすべて計算する：
  - 月日
  - 正午の経度
  - 南中・日出・日入の経度と時刻
  - 日中時間，午前の日中時間, 午後の日中時間
  - 南中太陽の高度
  - 南中日影の長さ
- モジュールB
  これは，(緯度, 公転角度) に対応するつぎの値をすべて計算する。
  - 月日
  - 正午の経度
  - 南中・日出・日入の経度と時刻
  - 日中時間，午前の日中時間, 午後の日中時間
  - 南中太陽の高度
  - 南中日影の長さ

7.2　PHP プログラム

本テクストが用いるプログラミング言語は，HTTPサーバと連携の PHP である。
プログラムは，表を HTMLドキュメントとして出力する。

7.3　計算式

(1) 公転角度に対応する月日

(2) 公転角度 τ に対する正午・南中の経度,
(公転角度 τ, 緯度 a) に対する日出・日入の経度

- 正午の経度

$$b = 270 + \tau$$

- 南中の経度

$$b_c = \frac{\tau_s}{\sqrt{1 - (n_s)^2(\tau_c)^2}}$$

- 日出の経度

$$b_c = \frac{-n_s\ a_s\ \tau_s\ \tau_c - n_c\tau_c\sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2(\tau_c)^2}}{a_c\ (1 - (n_s)^2(\tau_c)^2)}$$

- 日入の経度

$$b_c = \frac{-n_s\ a_s\ \tau_s\ \tau_c + n_c\tau_c\sqrt{(a_c)^2 - (n_s)^2(\tau_c)^2}}{a_c\ (1 - (n_s)^2(\tau_c)^2)}$$

b_c の方程式は，解 b が２つになる。
どちらが求める解であるかを判定する方法は，既に述べた：

☞ 経度余弦方程式の解判定手順

(3) 公転角度に対する南中の時刻,
(公転角度, 緯度) に対する日出・日入の時刻

- 経度差の時間差

正午とつぎの正午の経度差は，(1 + 1/365) × 360 度。
この経度差が１日の時間差。
よって，経度差１度あたりの時間差 (秒) は,

spd = (24 × 60 × 60) / ((1 + 1/365) × 360)

- 日出，南中，日入，正午の経度を——適宜 +360度を用いて——つぎのようにする：

０度 ≦ 日出 ＜ 南中，正午 ＜日入 ＜ 360度

- 日出の時刻は，正午(12時) の ＜spd × (正午の経度 − 日出の経度)＞ 前
- 日入の時刻は，正午(12時) の ＜spd × (日入の経度 − 正午の経度)＞ 後

- 南中の時刻は,
南中経度 ＜ 正午経度 ならば，正午(12時) の spd × (正午経度 − 南中経度) 前
南中経度 ＞ 正午経度 ならば，正午(12時) の spd × (南中経度 − 正午経度) 後

(4) 公転角度 τ に対する南中の経度,
(公転角度 τ, 緯度 a) に対する南中の太陽の仰角余角,
(公転角度 τ, 緯度 a, 経度 b) に対する太陽の仰角余角, 日影が南中の日影となす角度

- 南中の経度 s

$$cos(s) = \frac{\tau_s}{\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2}}$$

- 南中太陽の仰角余角 α_s

$$cos(\alpha_s) = a_c\sqrt{1-(n_s)^2(\tau_c)^2} + n_s a_s \tau_c$$

- 経度 b での太陽の仰角余角 α_b

$$cos(\alpha_b) = a_c\tau_s\, b_c - n_c a_c \tau_c\, b_s + n_s a_s \tau_c$$

- 経度 b での影が南中の影となす角度 β

$$cos(\beta) = \frac{cos(b-s) - cos(\alpha_b)cos(\alpha_s)}{sin(\alpha_b)sin(\alpha_s)}$$

7.4 「モジュール A」

緯度を固定して，公転角度を変数にしたつぎの配列を生成する：

公転角度の cos, sin	$tau_c[], $tau_s[]
月日 (文字列)	$date[]
正午, 南中, 日出, 日入 の経度 (rad と deg)	$midday_rad[], $midday_deg[] $midsun_rad[], $midsun_deg[] $sunrise_rad[], $sunrise_deg[] $sunset_rad[], $sunset_deg[]
南中, 日出, 日入 の時刻 (文字列)	$midsun_time[] $sunrise_time[] $sunset_time[]
日中, 日中午前, 日中午後 の時間 (sec と文字列)	$am_pm[], $am_pm_str[] $am[], $am_str[] $pm[], $pm_str[]
南中太陽の仰角余角 (rad と deg) と これの cos, sin	$alpha_rad[], $alpha_deg[] $alpha_c[], $alpha_s[]
南中の日影倍率	$r[]

```
/* 設定 *****************************************************/

/* 公転角度の何度から何度までを表示するか */
        $t_from_degree = 0;
        $t_to_degree = 360;

/* 公転角度の何度おきに表示するか */
        $t_u_degree = 5;

/* 緯度 */
        $a_degree = 50;


/* 公転角度と月日の対応 ****************************/

$m_days[1] = 31;
$m_days[2] = 28;
$m_days[3] = 31;
$m_days[4] = 30;
$m_days[5] = 31;
$m_days[6] = 30;
$m_days[7] = 31;
$m_days[8] = 31;
$m_days[9] = 30;
$m_days[10] = 31;
$m_days[11] = 30;
$m_days[12] = 31;
```

```
/* 夏至 (6 月 20 日 ) */
$summer_solstice_mon = 6;
$summer_solstice_day = 20;


$mm = $summer_solstice_mon;
$dd = $summer_solstice_day;

for( $i = 0; $i < 365; $i++ ){

	$month[$i] = $mm;
	$day[$i] = $dd;

	if( $dd + 1 > $m_days[$mm] ){
		$dd = 1;
		if( $mm + 1 < 13 ){
			$mm++;
		}
		else{
			$mm = 1;
		}
	}
	else{
		$dd++;
	}
}


/* 定項 ********************************************************/

/* 自転軸の傾き */
	$n_degree = 23.4;
	$n_radian = deg2rad( $n_degree );
	$n_s = sin( $n_radian );
	$n_c = cos( $n_radian );


/* 緯度 */
	$a_radian = deg2rad( $a_degree );
	$a_s = sin( $a_radian );
	$a_c = cos( $a_radian );


/* 経度差 1 度あたりの時間差 ( 秒 ) */
	$spd = 14600 / 61;



/* 公転角度と経度・時刻の対応 ****************************/

/* t_pi, t_0 */
	$sunrise_t_pi = 25;
	$sunrise_t_0 = 155;

	$sunset_t_pi = 205;
	$sunset_t_0 = 335;

	$midsun_t_pi = 270;
	$midsun_t_0 = 90;


/* t_pi, t_0 */
	$t_pi[0] = $sunrise_t_pi;
	$t_pi[1] = $sunset_t_pi;
```



```
	$t_pi[2] = $midsun_t_pi;

	$t_0[0] = $sunrise_t_0;
	$t_0[1] = $sunset_t_0;
	$t_0[2] = $midsun_t_0;


/* 時間表示での単位フォント ****************************/

	$h_font = "<font size=\"-1\" color=\"#999999\">h</font>";
	$m_font = "<font size=\"-1\" color=\"#999999\">m</font>";
	$s_font = "<font size=\"-1\" color=\"#999999\">s</font>";


/* 計算ループ ****************************************************/

for( $i = 0; $i < 360; $i++ ){

	$t = deg2rad( $i );
	$t_s = sin( $t );
	$t_c = cos( $t );

	$tau[$i] = $t;
	$tau_s[$i] = $t_s;
	$tau_c[$i] = $t_c;


	/* 日出・日入・南中の経度計算 ***/

	$sunrise_b_c = ( - $n_s * $a_s * $t_s * $t_c
				- $n_c * $t_c * sqrt( pow($a_c, 2) - pow($n_s * $t_c, 2) ) )
				/ ( $a_c * (1 - pow($n_s * $t_c, 2) ) );
	$sunset_b_c = ( - $n_s * $a_s * $t_s * $t_c
				+ $n_c * $t_c * sqrt( pow($a_c, 2) - pow($n_s * $t_c, 2) ) )
				/ ( $a_c * (1 - pow($n_s * $t_c, 2) ) );
	$midsun_b_c = $t_s / sqrt ( 1 - pow( $n_s, 2 ) * pow( $t_c, 2 ) );

	$sunrise_b = acos( $sunrise_b_c );
	$sunset_b = acos( $sunset_b_c );
	$midsun_b = acos( $midsun_b_c );


	/* 余弦方程式の二つの解 (α と 2π − α) のうちから，適正な方を選択 ***/

	if( $i == 0 ){
		$midsun_b = 2 * pi() - $midsun_b;

		$b_0[0] = $sunrise_b;
		$b_0[1] = $sunset_b;
		$b_0[2] = $midsun_b;

		$b[0] = $sunrise_b;
		$b[1] = $sunset_b;
		$b[2] = $midsun_b;
	}
	else {

		$b[0] = $sunrise_b;
		$b[1] = $sunset_b;
		$b[2] = $midsun_b;

		for( $j = 0; $j < 3; $j++ ){

			$case = 0;
```

```
					if( ( $i == $t_0[$j] ) || ( $i == $t_pi[$j] ) ){
						if( $i == $t_0[$j] ){
							$b[$j] = 0;
						}
						else{
							$b[$j] = pi();
						}
					}
					else {
						if( ( 0 < $b_0[$j] ) && ( $b_0[$j] < pi() ) ){
							if( $b_0[$j] <= $b[$j] ){
								if( $i < $t_pi[$j] ){
									$case = 111;
								}
								else{
									$case = 112;
								}
							}
							else{
								if( $i < $t_0[$j] ){
									$case = 121;
								}
								else{
									$case = 122;
								}
							}
						}
						/* ( pi() < $b_0[$j] ) && ( $b_0[$j] < 2 * pi() */
						else {
							if( $b_0[$j] <= 2 * pi() - $b[$j] ){
								if( $i < $t_0[$j] ){
									$case = 211;
								}
								else{
									$case = 212;
								}
							}
							else{
								if( $i < $t_pi[$j] ){
									$case = 221;
								}
								else{
									$case = 222;
								}
							}
						}
					}

					if( ( $case == 112 ) || ( $case == 121 )
						|| ( $case == 211 ) || ( $case == 222 ) ){
							$b[$j] = 2 * pi() - $b[$j];
					}

				}
			}


			/* 配列の作成 ***/

			if( ( $i >= $t_from_degree ) && ( $i < $t_to_degree ) ){
				if( $i % $t_u_degree == 0 ){

					/* 月日  ********/
					$ii = round( 365 * $i / 360, 0);
					$date[$i] = $month[$ii]."/".$day[$ii];
```



```
/* 日出・日入・南中の経度  ********/
$sunrise_rad[$i] = $b[0];
$sunset_rad[$i] = $b[1];
$midsun_rad[$i] = $b[2];

$sunrise_deg[$i] = rad2deg( $b[0] );
$sunset_deg[$i] = rad2deg( $b[1] );
$midsun_deg[$i] = rad2deg( $b[2] );


/* 正午の経度  ********/
$midday_deg[$i] = 270 + $i;
if( $midday_deg[$i] >= 360 ){
	$midday_deg[$i] = $midday_deg[$i] - 360;
}
$midday_rad[$i] = deg2rad( $midday_deg[$i] );


/* 時刻の計算  ******/

$sunrise = $sunrise_deg[$i];
$sunset = $sunset_deg[$i];
$midsun = $midsun_deg[$i];
$midday = $midday_deg[$i];

if( $sunset < $midsun ){
	$sunset = $sunset + 360;
}
if( $sunrise > $midsun ){
	$midsun = $midsun + 360;
	$sunset = $sunset + 360;
	$midday = $midday + 360;
}


/* 日出から正午までの時間，日出の時刻  ******/

$bd = $midday - $sunrise;
$sec = round( $spd * $bd, 0 );

$sec1 =  $sec % ( 60 * 60 );
$hh = ( $sec - $sec1 ) / ( 60 * 60 );
$ss = $sec1 % 60;
$mm = ( $sec1 - $ss ) / 60;

$am[$i] = $sec;
$am_str[$i] = $hh.$h_font.$mm.$m_font.$ss.$s_font;

$ss = 60 - $ss;
$mm = 59 - $mm;
$hh = 11 - $hh;

$sunrise_time[$i] = $hh.":".$mm.":".$ss;


/* 正午から日入までの時間，日入の時刻  ******/

$bd = $sunset - $midday;
$sec = round( $spd * $bd, 0 );

$sec1 =  $sec % ( 60 * 60 );
$hh = ( $sec - $sec1 ) / ( 60 * 60 );
$ss = $sec1 % 60;
$mm = ( $sec1 - $ss ) / 60;
```

```
				$pm[$i] = $sec;
				$pm_str[$i] = $hh.$h_font.$mm.$m_font.$ss.$s_font;

				$hh = 12 + $hh;

				$sunset_time[$i] = $hh.":".$mm.":".$ss;


				/* 日中時間  ******/

				$sec = $am[$i] + $pm[$i];

				$sec1 =  $sec % ( 60 * 60 );
				$hh = ( $sec - $sec1 ) / ( 60 * 60 );
				$ss = $sec1 % 60;
				$mm = ( $sec1 - $ss ) / 60;

				$am_pm[$i] = $sec;
				$am_pm_str[$i] = $hh.$h_font.$mm.$m_font.$ss.$s_font;


				/* 南中の時刻  ******/

				$bd = $midsun - $midday;
				$sec = round( $spd * $bd, 0 );

				if( $sec < 0 ){
					$sec = -$sec;
				}

				/* $sec は, 3600 秒 (1 時間 ) 未満 */
				$ss = $sec % 60;
				$mm = ( $sec - $ss ) / 60;

				/* 南中が午後 */
				if( $bd >= 0 ){
					$hh = 12;
				}
				/* 南中が正午前 */
				else {
					$ss = 60 - $ss;
					$mm = 59 - $mm;
					$hh = 11;
				}

				$midsun_time[$i] = $hh.":".$mm.":".$ss;


				/* 南中の太陽の仰角余角  ******/

				$t = deg2rad( $i );
				$t_c = cos( $t );
				$alpha_c[$i] = $a_c * sqrt( 1 - pow( $n_s, 2) * pow( $t_c, 2) )
						+ $n_s * $a_s * $t_c;
				$alpha_rad[$i] = acos($alpha_c[$i]);
				$alpha_s[$i] = sin($alpha_rad[$i]);
				$alpha_deg[$i] = round( rad2deg( $alpha_rad[$i] ), 1 );

				/* 南中の日影倍率 */
				$r[$i] = round( tan( $alpha_rad[$i] ), 2 );

			}
		}
}
```


7.5 「モジュール B」

つぎの配列―― 公転角度を変数にした配列 (緯度に依存しない) と, (公転角度, 緯度) を変数にした配列――を生成する：

公転角度の cos, sin	$tau_c[], $tau_s[]
月日 (文字列)	$date[]
正午, 南中, 日出, 日入 の経度 (rad と deg)	$midday_rad[], $midday_deg[] $midsun_rad[], $midsun_deg[] $sunrise_rad[][], $sunrise_deg[][] $sunset_rad[][], $sunset_deg[][]
南中, 日出, 日入 の時刻 (文字列)	$midsun_time[] $sunrise_time[][] $sunset_time[][]
日中, 日中午前, 日中午後 の時間 (sec と文字列)	$am_pm[][], $am_pm_str[][] $am[][], $am_str[][] $pm[][], $pm_str[][]
南中太陽の仰角余角 (rad) と これの cos, sin	$alpha_rad[][], $alpha_deg[][] $alpha_c[][], $alpha_s[][]
南中の日影倍率	$r[][]

（以下は, ２変数配列の生成では $alpha_rad[][], $alpha_deg[][], $alpha_c[][], $r[][] のみを示す）

```
/* 設定 ***********************************************************/

/* 公転角度の何度から何度までを表示するか */
	$t_from_degree = 0;
	$t_to_degree = 360;

/* 公転角度の何度おきに表示するか */
	$t_u_degree = 5;

/* 緯度の何度から何度までを表示するか */
	$a_from_degree = 25;
	$a_to_degree = 60;

/* 緯度の何度おきに表示するか */
	$a_u_degree = 5;
```

```
/* 公転角度と月日の対応 ******************************/

$m_days[1] = 31;
$m_days[2] = 28;
$m_days[3] = 31;
$m_days[4] = 30;
$m_days[5] = 31;
$m_days[6] = 30;
$m_days[7] = 31;
$m_days[8] = 31;
$m_days[9] = 30;
$m_days[10] = 31;
$m_days[11] = 30;
$m_days[12] = 31;

/*  夏至 (6 月 20 日 ) */
$summer_solstice_mon = 6;
$summer_solstice_day = 20;


$mm = $summer_solstice_mon;
$dd = $summer_solstice_day;

for( $i = 0; $i < 365; $i++ ){

	$month[$i] = $mm;
	$day[$i] = $dd;

	if( $dd + 1 > $m_days[$mm] ){
		$dd = 1;
		if( $mm + 1 < 13 ){
			$mm++;
		}
		else{
			$mm = 1;
		}
	}
	else{
		$dd++;
	}
}


/* 定項 ****************************************************/

/* 自転軸の傾き */
	$n_degree = 23.4;
	$n_radian = deg2rad( $n_degree );
	$n_s = sin( $n_radian );
	$n_c = cos( $n_radian );


/* 経度差 1 度あたりの時間差 ( 秒 ) */
	$spd = 14600 / 61;



/* 公転角度と経度・時刻の対応 ***************************/

/* t_pi, t_0 */
	$midsun_t_pi = 270;
	$midsun_t_0 = 90;
```



```
/* t_pi, t_0 */
	$t_pi = $midsun_t_pi;
	$t_0 = $midsun_t_0;


/* 計算ループ **********************************************/

for( $i = 0; $i < 360; $i++ ){

	$t = deg2rad( $i );
	$t_s = sin( $t );
	$t_c = cos( $t );

	$tau[$i] = $t;
	$tau_s[$i] = $t_s;
	$tau_c[$i] = $t_c;


	/*  南中の経度計算  ***/

	$midsun_b_c = $t_s / sqrt ( 1 - pow( $n_s, 2 ) * pow( $t_c, 2 ) );
	$midsun_b = acos( $midsun_b_c );


	/*  余弦方程式の二つの解 (α と 2π − α) のうちから，適正な方を選択  ***/

	if( $i == 0 ){
		$midsun_b = 2 * pi() - $midsun_b;
		$b_0 = $midsun_b;
		$b = $midsun_b;
	}
	else {
		$b = $midsun_b;

		$case = 0;

		if( ( $i == $t_0 ) || ( $i == $t_pi ) ){
			if( $i == $t_0 ){
				$b = 0;
			}
			else{
				$b = pi();
			}
		}
		else {
			if( ( 0 < $b_0 ) && ( $b_0 < pi() ) ){
				if( $b_0 <= $b ){
					if( $i < $t_pi ){
						$case = 111;
					}
					else{
						$case = 112;
					}
				}
				else{
					if( $i < $t_0 ){
						$case = 121;
					}
					else{
						$case = 122;
					}
				}
			}
			/* ( pi() < $b_0 ) && ( $b_0 < 2 * pi() */
```

```
				else {
					if( $b_0 <= 2 * pi() - $b ){
						if( $i < $t_0 ){
							$case = 211;
						}
						else{
							$case = 212;
						}
					}
					else{
						if( $i < $t_pi ){
							$case = 221;
						}
						else{
							$case = 222;
						}
					}
				}

				if( ( $case == 112 ) || ( $case == 121 )
					|| ( $case == 211 ) || ( $case == 222 ) ){
						$b = 2 * pi() - $b;
				}

			}
		}
		/* 配列の作成 ***/

		if( ( $i >= $t_from_degree ) && ( $i < $t_to_degree ) ){
			if( $i % $t_u_degree == 0 ){

				/* 月日  ********/
				$ii = round( 365 * $i / 360, 0);
				$date[$i] = $month[$ii]."/".$day[$ii];

				/* 南中の経度  ********/
				$midsun_rad[$i] = $b;
				$midsun_deg[$i] = rad2deg( $b );

				/* 正午の経度  ********/
				$midday_deg[$i] = 270 + $i;
				if( $midday_deg[$i] >= 360 ){
					$midday_deg[$i] = $midday_deg[$i] - 360;
				}
				$midday_rad[$i] = deg2rad( $midday_deg[$i] );

				/* 南中の時刻  ******/

				$midsun = $midsun_deg[$i];
				$midday = $midday_deg[$i];

				$bd = $midsun - $midday;
				$sec = round( $spd * $bd, 0 );

				if( $sec < 0 ){
					$sec = -$sec;
				}

				/* $sec は，3600 秒 (1 時間 ) 未満 */
				$ss = $sec % 60;
				$mm = ( $sec - $ss ) / 60;

				/* 南中が午後 */
				if( $bd >= 0 ){
					$hh = 12;
				}
```



```
				/* 南中が午前 */
				else {
					$ss = 60 - $ss;
					$mm = 59 - $mm;
					$hh = 11;
				}

				$midsun_time[$i] = $hh.":".$mm.":".$ss;


				/* 緯度に対する南中太陽の高度 */
				for( $j = $a_from_degree; $j <= $a_to_degree;
					$j = $j + $a_u_degree ){

					/* 緯度 */
					$a_radian = deg2rad( $j );
					$a_s = sin( $a_radian );
					$a_c = cos( $a_radian );

					/* 南中太陽の仰角余角 α */
					$alpha_c[$i][$j] = $a_c * sqrt( 1 - pow($n_s * $t_c, 2) )
								+ $n_s * $a_s * $t_c;
					$alpha_rad[$i][$j] = acos( $alpha_c[$i][$j] );
					$alpha_s[$i][$j] = sin( $alpha_rad[$i][$j] );
					$alpha_deg[$i][$j] = round( rad2deg( $alpha_rad[$i][$j] ), 1 );

					/* 南中影倍率 */
					$r[$i][$j] = round( tan( $alpha_rad[$i][$j] ), 2 );

				}
			}
		}
	}
```

8.　＜日出・南中・日入＞年表

8.1　日出・南中・日入時刻

8.2　日出・日入の太陽の方角，南中の太陽高度

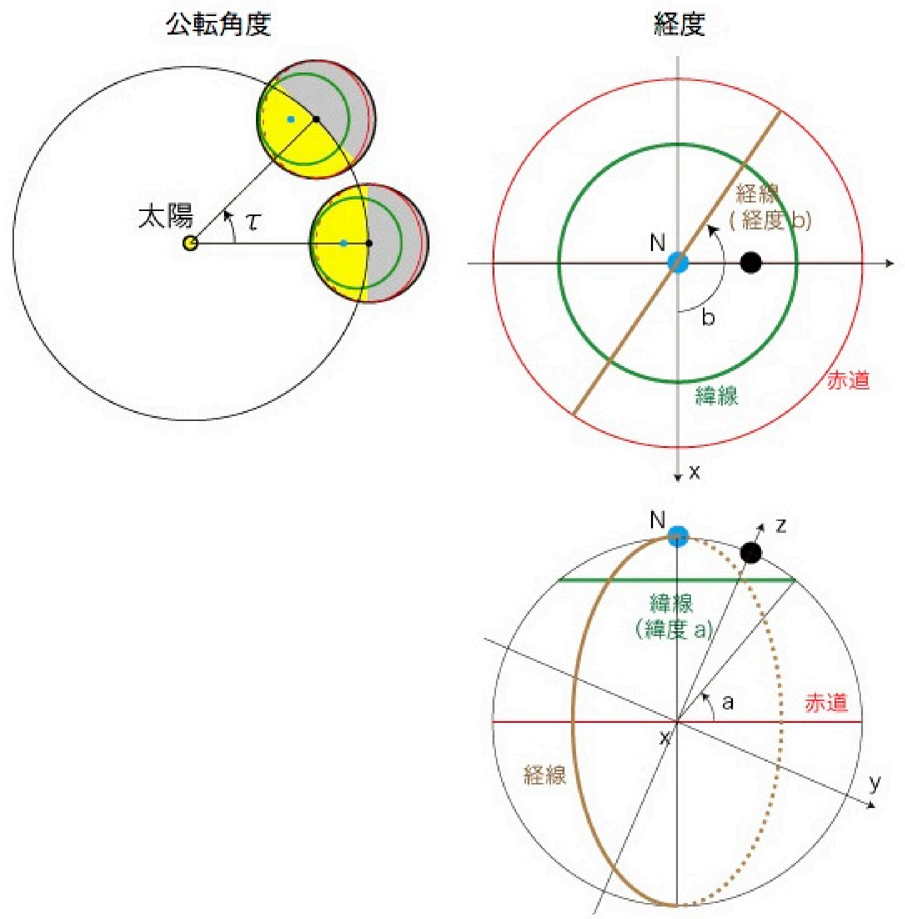
8.1　日出・南中・日入時刻

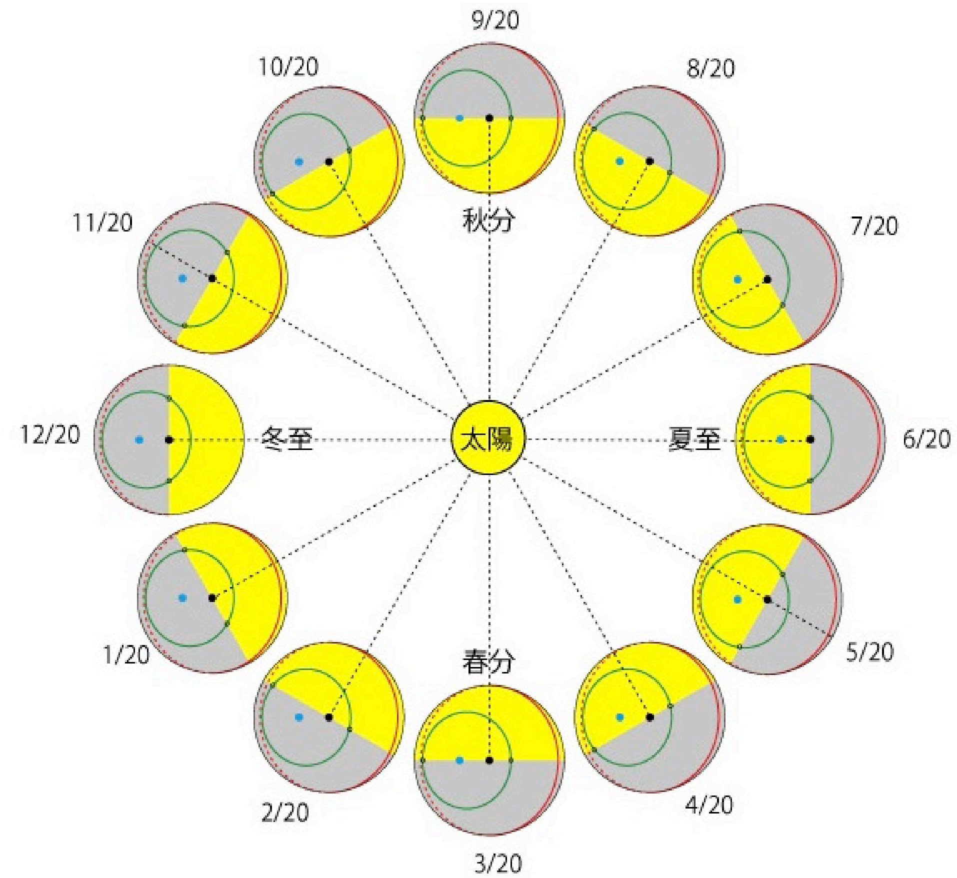
8.1.1　年間変化表

8.1.2　コンピュータプログラム

8.1.1　年間変化表

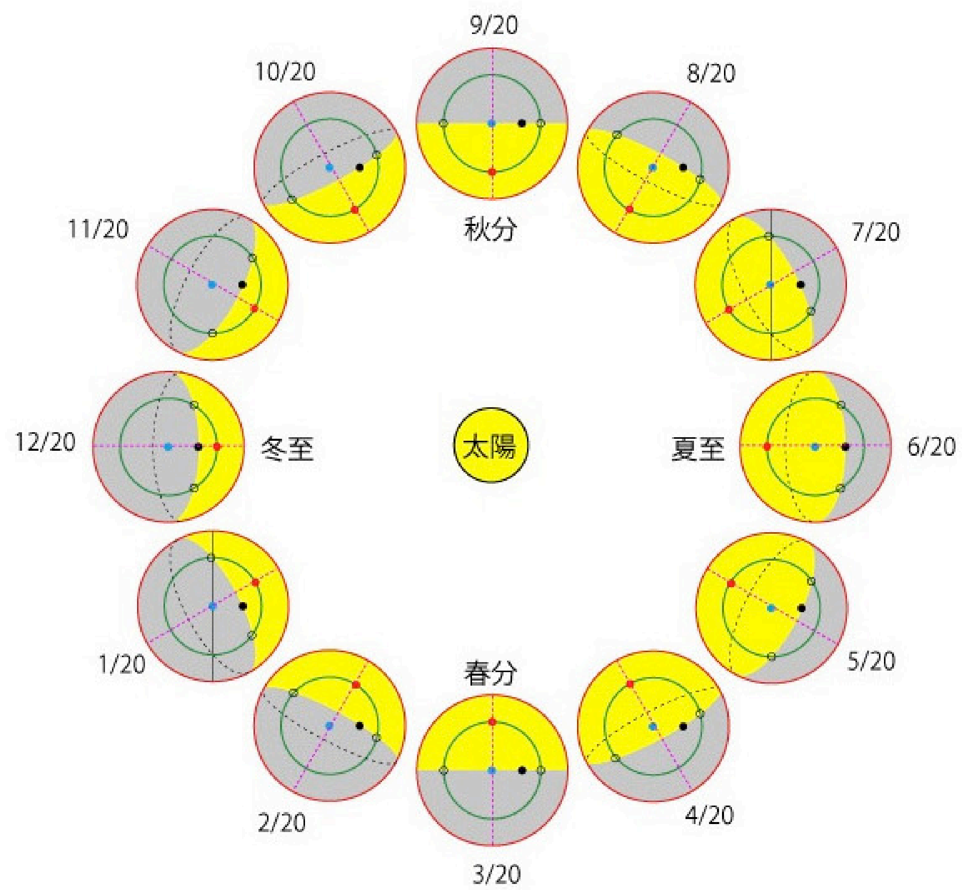
地球の公転角度と地点の座標をつぎのように定めて，日出・南中・日入時刻の年間変化表を作成する──以下，北緯50° の場合：





○は，日出と日入。

つぎは，上の図の個々の地球 (＜公転面に垂直に見た地球＞) を＜北極を真上から見た地球＞に置き換えたものである (注意：全体でこのように見えることはない)：



●は，北緯50° の「南中点」。

日出・南中・日入時刻の年間変化表 (北緯 50 度)

公転角度	月日	経度				時刻			日中時間			
		日出	南中	日入	正午	日出	南中	日入	午前	午後	計	増減(秒)
0	6/20	149	270	31	270	3:57:8	0:0:0	20:2:52	8h2m52s	8h2m52s	16h5m43s	—
5	6/25	155	275	36	275	3:59:32	0:1:47	20:4:1	8h0m28s	8h4m1s	16h4m29s	-74
10	6/30	160	281	41	280	4:3:6	0:3:30	20:3:53	7h56m54s	8h3m53s	16h0m47s	-221
15	7/5	167	286	46	285	4:7:42	0:5:5	20:2:28	7h52m18s	8h2m28s	15h54m46s	-361
20	7/10	173	292	50	290	4:13:14	0:6:31	19:59:48	7h46m46s	7h59m48s	15h46m34s	-492
25	7/15	180	297	54	295	4:21:15	0:7:43	19:55:56	7h38m45s	7h55m56s	15h34m40s	-714
30	7/20	186	302	58	300	4:26:24	0:8:40	19:50:56	7h33m36s	7h50m56s	15h24m32s	-609
35	7/25	193	307	62	305	4:33:46	0:9:21	19:44:55	7h26m14s	7h44m55s	15h11m9s	-803
40	7/31	200	312	65	310	4:41:28	0:9:43	19:37:59	7h18m32s	7h37m59s	14h56m31s	-878
45	8/5	207	317	68	315	4:49:22	0:9:48	19:30:13	7h10m38s	7h30m13s	14h40m51s	-940
50	8/10	214	322	71	320	4:57:24	0:9:35	19:21:45	7h2m36s	7h21m45s	14h24m21s	-990
55	8/15	221	327	73	325	5:5:29	0:9:4	19:12:40	6h54m31s	7h12m40s	14h7m11s	-1030
60	8/20	228	332	76	330	5:13:33	0:8:18	19:3:4	6h46m27s	7h3m4s	13h49m31s	-1061
65	8/25	235	337	79	335	5:21:35	0:7:18	18:53:1	6h38m25s	6h53m1s	13h31m26s	-1085
70	8/30	242	342	81	340	5:29:34	0:6:6	18:42:38	6h30m26s	6h42m38s	13h13m4s	-1102
75	9/4	249	346	83	345	5:37:29	0:4:43	18:31:58	6h22m31s	6h31m58s	12h54m28s	-1115
80	9/9	256	351	86	350	5:45:21	0:3:13	18:21:5	6h14m39s	6h21m5s	12h35m44s	-1124
85	9/14	263	355	88	355	5:53:11	0:1:38	18:10:5	6h6m49s	6h10m5s	12h16m54s	-1130
90	9/19	270	0	90	0	6:0:59	0:0:0	17:59:1	5h59m1s	5h59m1s	11h58m2s	-1132
95	9/24	277	5	92	5	6:8:47	11:58:22	17:47:57	5h51m13s	5h47m57s	11h39m10s	-1132
100	9/29	284	9	94	10	6:16:37	11:56:47	17:36:57	5h43m23s	5h36m57s	11h20m20s	-1130
105	10/4	291	14	97	15	6:24:29	11:55:17	17:26:4	5h35m31s	5h26m4s	11h1m36s	-1124
110	10/10	298	18	99	20	6:32:24	11:53:54	17:15:24	5h27m36s	5h15m24s	10h43m0s	-1115
115	10/15	305	23	101	25	6:40:23	11:52:42	17:5:1	5h19m37s	5h5m1s	10h24m38s	-1102
120	10/20	312	28	104	30	6:48:25	11:51:42	16:54:58	5h11m35s	4h54m58s	10h6m33s	-1085
125	10/25	319	33	107	35	6:56:29	11:50:56	16:45:22	5h3m31s	4h45m22s	9h48m53s	-1061
130	10/30	326	38	109	40	7:4:34	11:50:25	16:36:17	4h55m26s	4h36m17s	9h31m43s	-1030
135	11/4	333	43	112	45	7:12:36	11:50:12	16:27:49	4h47m24s	4h27m49s	9h15m13s	-990
140	11/9	340	48	115	50	7:20:30	11:50:17	16:20:3	4h39m30s	4h20m3s	8h59m33s	-940
145	11/14	347	53	118	55	7:28:12	11:50:39	16:13:7	4h31m48s	4h13m7s	8h44m55s	-878
150	11/19	354	58	122	60	7:35:34	11:51:20	16:7:6	4h24m26s	4h7m6s	8h31m32s	-803
155	11/24	0	63	126	65	7:40:43	11:52:17	16:2:6	4h19m17s	4h2m6s	8h21m24s	-609
160	11/29	7	68	130	70	7:48:44	11:53:29	15:58:14	4h11m16s	3h58m14s	8h9m30s	-714
165	12/4	13	74	134	75	7:54:16	11:54:55	15:55:34	4h5m44s	3h55m34s	8h1m18s	-492
170	12/9	20	79	139	80	7:58:52	11:56:30	15:54:9	4h1m8s	3h54m9s	7h55m16s	-361
175	12/14	25	85	144	85	8:2:26	11:58:13	15:54:1	3h57m34s	3h54m1s	7h51m35s	-221
180	12/20	31	90	149	90	8:4:50	0:0:0	15:55:10	3h55m10s	3h55m10s	7h50m21s	-74
185	12/25	36	95	155	95	8:5:59	0:1:47	15:57:34	3h54m1s	3h57m34s	7h51m35s	74
190	12/30	41	101	160	100	8:5:51	0:3:30	16:1:8	3h54m9s	4h1m8s	7h55m16s	221
195	1/4	46	106	167	105	8:4:26	0:5:5	16:5:44	3h55m34s	4h5m44s	8h1m18s	361
200	1/9	50	112	173	110	8:1:46	0:6:31	16:11:16	3h58m14s	4h11m16s	8h9m30s	492
205	1/14	54	117	180	115	7:57:54	0:7:43	16:19:17	4h2m6s	4h19m17s	8h21m24s	714
210	1/19	58	122	186	120	7:52:54	0:8:40	16:24:26	4h7m6s	4h24m26s	8h31m32s	609
215	1/24	62	127	193	125	7:46:53	0:9:21	16:31:48	4h13m7s	4h31m48s	8h44m55s	803
220	1/29	65	132	200	130	7:39:57	0:9:43	16:39:30	4h20m3s	4h39m30s	8h59m33s	878
225	2/3	68	137	207	135	7:32:11	0:9:48	16:47:24	4h27m49s	4h47m24s	9h15m13s	940
230	2/8	71	142	214	140	7:23:43	0:9:35	16:55:26	4h36m17s	4h55m26s	9h31m43s	990
235	2/13	73	147	221	145	7:14:38	0:9:4	17:3:31	4h45m22s	5h3m31s	9h48m53s	1030
240	2/18	76	152	228	150	7:5:2	0:8:18	17:11:35	4h54m58s	5h11m35s	10h6m33s	1061
245	2/23	79	157	235	155	6:54:59	0:7:18	17:19:37	5h5m1s	5h19m37s	10h24m38s	1085
250	2/28	81	162	242	160	6:44:36	0:6:6	17:27:36	5h15m24s	5h27m36s	10h43m0s	1102
255	3/6	83	166	249	165	6:33:56	0:4:43	17:35:31	5h26m4s	5h35m31s	11h1m36s	1115
260	3/11	86	171	256	170	6:23:3	0:3:13	17:43:23	5h36m57s	5h43m23s	11h20m20s	1124
265	3/16	88	175	263	175	6:12:3	0:1:38	17:51:13	5h47m57s	5h51m13s	11h39m10s	1130
270	3/21	90	180	270	180	6:0:59	0:0:0	17:59:1	5h59m1s	5h59m1s	11h58m2s	1132
275	3/26	92	185	277	185	5:49:55	11:58:22	18:6:49	6h10m5s	6h6m49s	12h16m54s	1132
280	3/31	94	189	284	190	5:38:55	11:56:47	18:14:39	6h21m5s	6h14m39s	12h35m44s	1130
285	4/5	97	194	291	195	5:28:2	11:55:17	18:22:31	6h31m58s	6h22m31s	12h54m28s	1124
290	4/10	99	198	298	200	5:17:22	11:53:54	18:30:26	6h42m38s	6h30m26s	13h13m4s	1115
295	4/15	101	203	305	205	5:6:59	11:52:42	18:38:25	6h53m1s	6h38m25s	13h31m26s	1102
300	4/20	104	208	312	210	4:56:56	11:51:42	18:46:27	7h3m4s	6h46m27s	13h49m31s	1085
305	4/25	107	213	319	215	4:47:20	11:50:56	18:54:31	7h12m40s	6h54m31s	14h7m11s	1061
310	4/30	109	218	326	220	4:38:15	11:50:25	19:2:36	7h21m45s	7h2m36s	14h24m21s	1030
315	5/5	112	223	333	225	4:29:47	11:50:12	19:10:38	7h30m13s	7h10m38s	14h40m51s	990
320	5/10	115	228	340	230	4:22:1	11:50:17	19:18:32	7h37m59s	7h18m32s	14h56m31s	940
325	5/16	118	233	347	235	4:15:5	11:50:39	19:26:14	7h44m55s	7h26m14s	15h11m9s	878
330	5/21	122	238	354	240	4:9:4	11:51:20	19:33:36	7h50m56s	7h33m36s	15h24m32s	803
335	5/26	126	243	0	245	4:4:4	11:52:17	19:38:45	7h55m56s	7h38m45s	15h34m40s	609
340	5/31	130	248	7	250	4:0:12	11:53:29	19:46:46	7h59m48s	7h46m46s	15h46m34s	714
345	6/5	134	254	13	255	3:57:32	11:54:55	19:52:18	8h2m28s	7h52m18s	15h54m46s	492
350	6/10	139	259	20	260	3:56:7	11:56:30	19:56:54	8h3m53s	7h56m54s	16h0m47s	361
355	6/15	144	265	25	265	3:55:59	11:58:13	20:0:28	8h4m1s	8h0m28s	16h4m29s	221

8.1.2　コンピュータプログラム

```
";
  ( モジュール A を挿入 )


/* 表ヘッダ ************************************/

          print "
          日出・南中・日入時刻の年間変化表 ( 北緯 ".$a_degree." 度 )
          <table cellpadding=2><tr><td></td></tr></table>
          <table border=1 cellspacing=0>
          <tr>
          <td rowspan=2 align=center> 公転角度 </td>
          <td rowspan=2 align=center bgcolor=\"#e3e3e3\"> 月日 </td>
          <td colspan=4 align=center> 経度 </td>
          <td colspan=3 align=center> 時刻 </td>
          <td colspan=4 align=center> 日中時間 </td>
          </tr>
          <tr>
          <td align=center> 日出 </td>
          <td align=center> 南中 </td>
          <td align=center> 日入 </td>
          <td align=center> 正午 </td>
          <td align=center bgcolor=\"#e3e3e3\"> 日出 </td>
          <td align=center> 南中 </td>
          <td align=center bgcolor=\"#e3e3e3\"> 日入 </td>
          <td align=center> 午前 </td>
          <td align=center> 午後 </td>
          <td align=center bgcolor=\"#e3e3e3\"> 計 </td>
          <td align=center> 増減 ( 秒 )</td>
          </tr>
          ";


/* 表生成ループ ************************************/

for( $i = $t_from_degree; $i < $t_to_degree; $i = $i + $t_u_degree ){

          if( ( $i % 90 ) == 0 ){
                    print "
          <tr bgcolor=\"#eedd00\">";
          }
          else {
                    print "
<tr>";
          }

          $h_font = "<font size=\"-1\" color=\"#999999\">h</font>";
          $m_font = "<font size=\"-1\" color=\"#999999\">m</font>";
          $s_font = "<font size=\"-1\" color=\"#999999\">s</font>";

          print "
          <td align=center>".$i."</td>
          <td align=center bgcolor=\"#e3e3e3\">".$date[$i]."</td>

          <td align=right>".round( $sunrise_deg[$i], 0 )."</td>
          <td align=right>".round( $midsun_deg[$i], 0 )."</td>
          <td align=right>".round( $sunset_deg[$i], 0 )."</td>
          <td align=right>".round( $midday_deg[$i], 0 )."</td>
          <td align=left bgcolor=\"#e3e3e3\">".$sunrise_time[$i]."</td>
          <td align=left>".$midsun_time[$i]."</td>
          <td align=left bgcolor=\"#e3e3e3\">".$sunset_time[$i]."</td>

          <td align=left>".$am_str[$i]."</td>
          <td align=left>".$pm_str[$i]."</td>
          <td align=left bgcolor=\"#e3e3e3\">".$am_pm_str[$i]."</td>
          ";
          if( $i > 0 ){
                    print "
          <td align=right>".round( $am_pm[$i] - $am_pm[$i - $t_u_degree] )."</td>";
          }
          else {
                    print "
          <td align=center> ― </td>";
          }
          print "
          </tr>
          ";
}

print "
          </table>
```

8.2　日出・日入の太陽の方角，南中の太陽高度

8.2.1　年間変化表

太陽が東から昇り，最高点に至り，そして西に沈む。
この太陽の動きは，１年を周期にして変化する。
実際，この１周期を以て１年を定義しているわけである。

南中の太陽の方角を向いたときの日出/日入の方角は，それぞれ

　東の方に｜南中の経度 ー 日出の経度｜
　西の方に｜南中の経度 ー 日入の経度｜

であり，角度は等しい。

以下に，＜日出/日入の方角，南中の太陽の仰角＞の年間変化を示す。

北緯 45 度の場合

公転角度(τ)	日出/日入	南中
0	116	68
10	115	68
20	114	67
30	111	65
40	109	63
50	105	60
60	102	56
70	98	53
80	94	49
90	90	45
100	86	41
110	82	37
120	78	34
130	75	30
140	71	27
150	69	25
160	66	23
170	65	22
180	64	22
190	65	22
200	66	23
210	69	25
220	71	27
230	75	30
240	78	34
250	82	37
260	86	41
270	90	45
280	94	49
290	98	53
300	102	56
310	105	60
320	109	63
330	111	65
340	114	67
350	115	68

8.2.2　コンピュータプログラム

```
";
  ( モジュール A を挿入 )


/* 表ヘッダ ************************************/

        print "
        <table><tr><td>
        南中の太陽の方角を向いたときの
        <br>      日出 / 日入の方角 ( 東 / 西に何度 )
        <br>      南中太陽の仰角余角
        <br>( 北緯 ".$a_degree." 度の場合 )
        </td></tr></table>
        <table cellpadding=2><tr><td></td></tr></table>

        <table border=1 cellspacing=0>
        <tr>
        <td> 公転角度 </td>
        <td align=center>　日出 / 日入　</td>
        <td align=center>　南中　</td>
        </tr>
        ";


/* 表生成ループ ************************************/

for( $i = $t_from_degree; $i < $t_to_degree; $i = $i + $t_u_degree ){

        /*　南中と日出の経度差　****/

        $midsun = $midsun_deg[$i];
        $sunrise = $sunrise_deg[$i];
        if( $sunrise > $midsun ){
                $midsun = $midsun + 360;
        }
        $d = round( $midsun - $sunrise, 0 );

        /*　レコード ( 表の 1 行分 ) 書き出し　****/
        print "
        <tr>
        <td align=center>".$i."</td>
        <td align=center>".$d."</td>
        <td align=center>".$alpha_deg[$i]."</td>
        </tr>
        ";
}

print "
        </table>
```

9.　＜日影＞年表

9.1　＜時刻─日影の向き＞対応表

9.2　＜時刻─日影の長さ＞対応表

9.3　＜(公転角度 , 緯度) ─南中太陽の高度
・日影倍率＞対応表

9.1　＜時刻─日影の向き＞対応表

9.1.1　対応表

9.1.2　表作成コンピュータプログラム

9.1.1 対応表

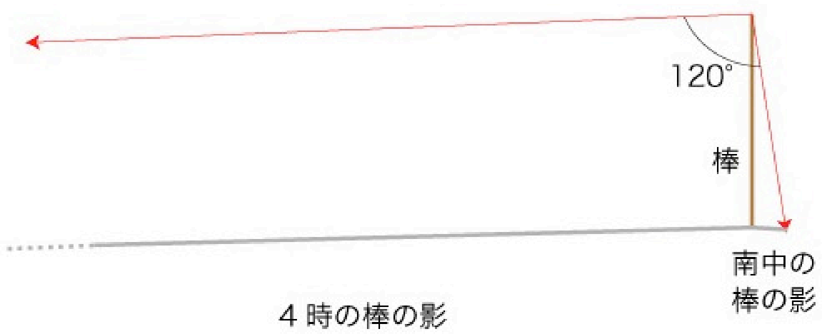
北緯50度の場合

公転角度	月日	南中の時刻	南中の影と○時の影のなす角の大きさ (度)																
			4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	6/20	12:0:0	NAN	153	130	112	96	78	58	32	0	32	58	78	96	112	130	153	NAN
5	6/25	12:1:47	NAN	153	130	112	96	79	59	33	1	31	57	78	95	111	129	151	NAN
10	6/30	12:3:30		152	129	112	96	79	59	33	2	30	56	77	94	110	127	149	NAN
15	7/5	12:5:5		149	128	111	95	78	59	34	3	29	55	75	92	108	125	145	NAN
20	7/10	12:6:31		146	126	110	94	78	58	34	3	27	53	74	91	106	122	141	NAN
25	7/15	12:7:43		142	123	108	93	76	57	33	4	26	52	72	89	104	119	137	
30	7/20	12:8:40		138	121	106	91	75	56	33	4	25	50	70	86	101	116	133	
35	7/25	12:9:21		134	118	103	89	73	55	32	5	24	48	68	84	99	113	128	
40	7/31	12:9:43		130	115	101	87	71	54	31	5	23	47	66	82	96	110	125	
45	8/5	12:9:48		126	112	98	84	70	52	30	4	22	45	64	80	94	107	121	
50	8/10	12:9:35		122	109	96	82	68	50	29	4	21	44	62	78	91	104	118	
55	8/15	12:9:4			106	93	80	66	48	28	4	21	43	61	76	89	102	115	
60	8/20	12:8:18			103	91	78	63	47	27	3	20	41	59	74	87	99	112	
65	8/25	12:7:18			100	88	76	61	45	25	3	20	40	58	72	85	97		
70	8/30	12:6:6			98	86	73	60	43	24	2	20	40	56	71	83	95		
75	9/4	12:4:43			96	84	71	58	42	23	2	20	39	55	69	82	94		
80	9/9	12:3:13			94	82	70	56	40	22	1	19	38	54	68	81	92		
85	9/14	12:1:38			92	80	68	54	38	20	1	19	38	53	67	79	91		
90	9/19	12:0:0				78	66	53	37	19	0	19	37	53	66	78			
95	9/24	11:58:22				77	65	51	36	18	1	19	37	52	65	78			
100	9/29	11:56:47				76	63	50	34	17	1	19	36	51	65	77			
105	10/4	11:55:17				74	62	48	33	17	1	19	36	51	64	76			
110	10/10	11:53:54				73	61	47	32	16	2	19	36	50	63	76			
115	10/15	11:52:42				72	60	46	32	15	2	19	35	50	63	75			
120	10/20	11:51:42				72	59	46	31	15	2	19	35	49	63				
125	10/25	11:50:56				71	58	45	30	14	3	19	35	49	62				
130	10/30	11:50:25					58	44	30	14	3	19	34	49	62				
135	11/4	11:50:12					57	44	29	14	3	19	34	48	62				
140	11/9	11:50:17					57	44	29	14	3	19	34	48	61				
145	11/14	11:50:39					57	43	29	13	3	18	34	48	61				
150	11/19	11:51:20					57	43	29	14	2	18	33	47	61				
155	11/24	11:52:17					57	43	29	14	2	18	33	47	60				
160	11/29	11:53:29					57	44	29	14	2	17	32	47					
165	12/4	11:54:55					57	44	29	14	1	17	32	46					
170	12/9	11:56:30					58	44	30	15	1	16	32	46					
175	12/14	11:58:13						44	30	15	0	16	31	45					
180	12/20	12:0:0						45	31	16	0	16	31	45					
185	12/25	12:1:47						45	31	16	0	15	30	44					
190	12/30	12:3:30						46	32	16	1	15	30	44	58				
195	1/4	12:5:5						46	32	17	1	14	29	44	57				
200	1/9	12:6:31						47	32	17	2	14	29	44	57				
205	1/14	12:7:43					60	47	33	18	2	14	29	43	57				
210	1/19	12:8:40					61	47	33	18	2	14	29	43	57				
215	1/24	12:9:21					61	48	34	18	3	13	29	43	57				
220	1/29	12:9:43					61	48	34	19	3	14	29	44	57				
225	2/3	12:9:48					62	48	34	19	3	14	29	44	57				
230	2/8	12:9:35					62	49	34	19	3	14	30	44	58				
235	2/13	12:9:4					62	49	35	19	3	14	30	45	58	71			
240	2/18	12:8:18					63	49	35	19	2	15	31	46	59	72			
245	2/23	12:7:18				75	63	50	35	19	2	15	32	46	60	72			
250	2/28	12:6:6				76	63	50	36	19	2	16	32	47	61	73			
255	3/6	12:4:43				76	64	51	36	19	1	17	33	48	62	74			
260	3/11	12:3:13				77	65	51	36	19	1	17	34	50	63	76			
265	3/16	12:1:38				78	65	52	37	19	1	18	36	51	65	77			
270	3/21	12:0:0				78	66	53	37	19	0	19	37	53	66	78			
275	3/26	11:58:22			91	79	67	53	38	19	1	20	38	54	68	80	92		
280	3/31	11:56:47			92	81	68	54	38	19	1	22	40	56	70	82	94		
285	4/5	11:55:17			94	82	69	55	39	20	2	23	42	58	71	84	96		
290	4/10	11:53:54			95	83	71	56	40	20	2	24	43	60	73	86	98		
295	4/15	11:52:42			97	85	72	58	40	20	3	25	45	61	76	88	100		
300	4/20	11:51:42		112	99	87	74	59	41	20	3	27	47	63	78	91	103		
305	4/25	11:50:56		115	102	89	76	61	43	21	4	28	48	66	80	93	106		
310	4/30	11:50:25		118	104	91	78	62	44	21	4	29	50	68	82	96	109	122	
315	5/5	11:50:12		121	107	94	80	64	45	22	4	30	52	70	84	98	112	126	
320	5/10	11:50:17		125	110	96	82	66	47	23	5	31	54	71	87	101	115	130	
325	5/16	11:50:39		128	113	99	84	68	48	24	5	32	55	73	89	103	118	134	
330	5/21	11:51:20		133	116	101	86	70	50	25	4	33	56	75	91	106	121	138	
335	5/26	11:52:17		137	119	104	89	72	52	26	4	33	57	76	93	108	123	142	
340	5/31	11:53:29	NAN	141	122	106	91	74	53	27	3	34	58	78	94	110	126	146	
345	6/5	11:54:55	NAN	145	125	108	92	75	55	29	3	34	59	78	95	111	128	149	
350	6/10	11:56:30	NAN	149	127	110	94	77	56	30	2	33	59	79	96	112	129	152	
355	6/15	11:58:13	NAN	151	129	111	95	78	57	31	1	33	59	79	96	112	130	153	NAN

表中の「NAN」は，計算不能を示す。
これは，コンピュータの計算の限界を示す。

公転角度０（夏至）の４時の「NAM」の場合で，このことを説明する。

夏至の４時の地点と南中点の経度差は，120度。
日出直後は光が真横から差し，そして夏至の南中の影は短い。
よって，４時の影と南中の影のなす角の大きさβは，このとき 180度に近くなる。



βは，cos(β) を計算し，これの acos として求める。（☞ 日影移動の計算）
この計算では，βが 180度 に近いとき，cos(β) は１に非常に近い。
そして cos(β) の計算値が，計算式を構成する項の計算の誤差が累積して，１を超えてしまうことがある。
そうなると，βの値は存在しないことになる。
そしてコンピュータが「NAN」を返してくるというわけである。

9.1.2 対応表作成コンピュータプログラム

```
";
  ( モジュール A を挿入 )


/* 表ヘッダ **************************************/

            print "
影の角度 ( 南中時の影に対して )
<br> 北緯 ".$a_degree." 度の場合

<table cellpadding=2><tr><td></td></tr></table>

<table border=1 cellspacing=0>
<tr>
<td rowspan=2 align=center nowrap> 公転 <br> 角度 </td>
<td rowspan=2 align=center bgcolor=\"#e3e3e3\"> 月日 </td>
<td rowspan=2 align=center\"> 南中 <br> の時刻 </td>
<td colspan=17 align=center> 南中の影と○時の影のなす角の大きさ ( 度 )</td>
</tr>
<tr>
<td align=center>4</td>
<td align=center>5</td>
<td align=center>6</td>
<td align=center>7</td>
<td align=center>8</td>
<td align=center>9</td>
<td align=center>10</td>
<td align=center>11</td>
<td align=center bgcolor=\"#ffb000\">12</td>
<td align=center>13</td>
<td align=center>14</td>
<td align=center>15</td>
<td align=center>16</td>
<td align=center>17</td>
<td align=center>18</td>
<td align=center>19</td>
<td align=center>20</td>
</tr>
            ";


/* 表生成ループ **************************************/

for( $i = $t_from_degree; $i < $t_to_degree; $i = $i + $t_u_degree ){

            /*******     レコード ( 表の１行分 ) 書き出し   *******************/

            if( ( $i % 90 ) == 0 ){
                        print "
<tr bgcolor=\"#eedd00\">";
            }
            else {
                        print "
<tr>";
            }
            print "
<td align=right>".$i."</td>
<td bgcolor=\"#e3e3e3\">".$date[$i]."</td>
<td>".$midsun_time[$i]."</td>";
```

```
		for( $k = 4; $k <= 20; $k++ ){

			$sunrise = $sunrise_rad[$i];
			$sunset = $sunset_rad[$i];
			$midday = $midday_rad[$i];
			$middayDEG = $midday_deg[$i];

			if( $midday > $sunset ){
				$sunset = $sunset + pi() * 2;
			}
			if( $sunrise > $midday ){
				$middayDEG = $middayDEG + 360;
				$sunset = $sunset + pi() * 2;
			}

			/* $k 時の経度 */
			$bK_deg = $middayDEG + 15 * ( $k - 12 );
			$bK_rad = deg2rad( $bK_deg );

			/* 日出から日入までの間か？ */
			if( ( $bK_rad > $sunrise ) && ( $bK_rad <$sunset ) ){

				$pK = $bK_rad - $midsun_rad[$i];
				$pK_c = cos( $pK );

				$bK_c = cos( $bK_rad );
				$bK_s = sin( $bK_rad );

				$alphaK_c = $a_c * $tau_s[$i] * $bK_c
					- $n_c * $a_c * $tau_c[$i] * $bK_s + $n_s * $a_s *
$tau_c[$i];
				$alphaK = acos( $alphaK_c );
				$alphaK_s = sin( $alphaK );

				$betaK_c = ( $pK_c - $alphaK_c * $alpha_c[$i] ) / ( $alphaK_
s * $alpha_s[$i] );
				$betaK_rad = acos( $betaK_c );
				$betaK_deg = round( rad2deg( $betaK_rad ), 0 );

				if( $k == 12 ){
					$bgcl = "ffb000";
				}
				else {
				$bgcl = "ffff66";
				}
				print "
<td align=right bgcolor=\"#".$bgcl."\">".$betaK_deg."</td>";
			}
			else {
				print "
<td bgcolor=\"#666699\">　</td>";
			}
		}

		print "
</tr>";
}

print "
</table>
";
```


9.2　＜時刻―日影の長さ＞対応表

9.2.1　対応表

緯度 a を固定するとき，公転角度と経度の対 (τ , b) に対し，太陽の仰角余角 α がつぎのように決まる (☞ 太陽の高度)：

$$\alpha_c = a_c \tau_s \, b_c - n_c a_c \tau_c \, b_s + n_s a_s \tau_c$$

n : 地軸の傾き (公転面の法線と地軸がなす角の大きさ)

太陽の仰角余角が α のとき，水平面に垂直に立てた棒の影の長さは，棒の高さの $tan(\alpha)$ 倍。
よって，計算によりつぎの表を得る：

北緯50度の場合

公転角度	月日	南中の時刻	○時の影の長さ (倍率)																
			4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	6/20	12:0:0	—	6.5	3.1	1.9	1.3	1	0.7	0.6	0.5	0.6	0.7	1	1.3	1.9	3.1	6.5	—
5	6/25	12:1:47	—	6.8	3.2	2	1.4	1	0.7	0.6	0.5	0.6	0.7	1	1.3	1.9	3.1	6.4	84.1
10	6/30	12:3:30		7.2	3.3	2	1.4	1	0.7	0.6	0.5	0.6	0.7	1	1.3	1.9	3.1	6.4	85.6
15	7/5	12:5:5		7.8	3.4	2.1	1.4	1	0.7	0.6	0.5	0.6	0.7	1	1.3	1.9	3.1	6.5	—
20	7/10	12:6:31		8.6	3.6	2.1	1.4	1	0.8	0.6	0.5	0.6	0.7	1	1.3	1.9	3.1	6.7	—
25	7/15	12:7:43		9.8	3.8	2.2	1.5	1.1	0.8	0.6	0.6	0.6	0.7	1	1.4	2	3.2	7.1	
30	7/20	12:8:40		11.7	4	2.3	1.5	1.1	0.8	0.6	0.6	0.6	0.8	1	1.4	2	3.3	7.7	
35	7/25	12:9:21		14.7	4.3	2.4	1.6	1.1	0.8	0.7	0.6	0.6	0.8	1	1.4	2.1	3.5	8.6	
40	7/31	12:9:43		20.1	4.7	2.5	1.7	1.2	0.9	0.7	0.6	0.7	0.8	1.1	1.5	2.2	3.7	10	
45	8/5	12:9:48		33.2	5.2	2.7	1.7	1.2	0.9	0.7	0.7	0.7	0.8	1.1	1.5	2.3	4	12.3	
50	8/10	12:9:35		—	5.8	2.8	1.8	1.3	1	0.8	0.7	0.7	0.9	1.2	1.6	2.4	4.4	16.6	
55	8/15	12:9:4			6.6	3	1.9	1.3	1	0.8	0.8	0.8	0.9	1.2	1.7	2.6	4.9	27.3	
60	8/20	12:8:18			7.7	3.3	2	1.4	1.1	0.9	0.8	0.8	1	1.3	1.8	2.8	5.6	88.6	
65	8/25	12:7:18			9.2	3.5	2.1	1.5	1.1	0.9	0.9	0.9	1.1	1.4	1.9	3	6.6		
70	8/30	12:6:6			11.4	3.8	2.2	1.5	1.2	1	0.9	1	1.1	1.5	2.1	3.4	8.2		
75	9/4	12:4:43			15.2	4.2	2.4	1.6	1.2	1	1	1	1.2	1.6	2.2	3.8	10.8		
80	9/9	12:3:13			22.8	4.7	2.5	1.7	1.3	1.1	1	1.1	1.3	1.7	2.4	4.3	16.1		
85	9/14	12:1:38			45.6	5.2	2.7	1.8	1.4	1.2	1.1	1.2	1.4	1.8	2.7	5	32.1		
90	9/19	12:0:0				5.9	2.9	2	1.5	1.3	1.2	1.3	1.5	2	2.9	5.9			
95	9/24	11:58:22				6.9	3.2	2.1	1.6	1.4	1.3	1.4	1.6	2.1	3.3	7.3			
100	9/29	11:56:47				8.1	3.5	2.2	1.7	1.4	1.4	1.5	1.7	2.3	3.7	9.5			
105	10/4	11:55:17				10	3.8	2.4	1.8	1.5	1.5	1.6	1.9	2.6	4.2	13.5			
110	10/10	11:53:54				12.9	4.3	2.6	2	1.7	1.6	1.7	2	2.8	4.9	22.6			
115	10/15	11:52:42				18.2	4.8	2.8	2.1	1.8	1.7	1.8	2.2	3.1	5.8	63.3			
120	10/20	11:51:42				30.3	5.4	3.1	2.3	1.9	1.8	2	2.4	3.5	6.9				
125	10/25	11:50:56				88.1	6.2	3.4	2.4	2.1	2	2.1	2.6	3.9	8.5				
130	10/30	11:50:25					7.2	3.7	2.6	2.2	2.1	2.3	2.9	4.3	10.8				
135	11/4	11:50:12					8.6	4.1	2.8	2.4	2.3	2.5	3.1	4.8	14.2				
140	11/9	11:50:17					10.4	4.5	3.1	2.6	2.4	2.7	3.4	5.4	19.9				
145	11/14	11:50:39					13.1	5	3.3	2.7	2.6	2.9	3.6	6.1	30.3				
150	11/19	11:51:20					17.2	5.5	3.6	2.9	2.8	3	3.9	6.7	54.7				
155	11/24	11:52:17					24.1	6.1	3.8	3.1	2.9	3.2	4.2	7.4	—				
160	11/29	11:53:29					37.2	6.7	4.1	3.2	3.1	3.4	4.4	8					
165	12/4	11:54:55					69.9	7.3	4.3	3.4	3.2	3.5	4.6	8.5					
170	12/9	11:56:30					—	7.9	4.5	3.5	3.3	3.6	4.7	8.9					
175	12/14	11:58:13						8.4	4.6	3.6	3.3	3.6	4.8	8.9					
180	12/20	12:0:0						8.8	4.7	3.6	3.4	3.6	4.7	8.8					
185	12/25	12:1:47						8.9	4.8	3.6	3.3	3.6	4.6	8.4					
190	12/30	12:3:30						8.9	4.7	3.6	3.3	3.5	4.5	7.9	—				
195	1/4	12:5:5						8.5	4.6	3.5	3.2	3.4	4.3	7.3	69.9				
200	1/9	12:6:31						8	4.4	3.4	3.1	3.2	4.1	6.7	37.2				
205	1/14	12:7:43					—	7.4	4.2	3.2	2.9	3.1	3.8	6.1	24.1				
210	1/19	12:8:40					54.7	6.7	3.9	3	2.8	2.9	3.6	5.5	17.2				
215	1/24	12:9:21					30.3	6.1	3.6	2.9	2.6	2.7	3.3	5	13.1				
220	1/29	12:9:43					19.9	5.4	3.4	2.7	2.4	2.6	3.1	4.5	10.4				
225	2/3	12:9:48					14.2	4.8	3.1	2.5	2.3	2.4	2.8	4.1	8.6				
230	2/8	12:9:35					10.8	4.3	2.9	2.3	2.1	2.2	2.6	3.7	7.2				
235	2/13	12:9:4					8.5	3.9	2.6	2.1	2	2.1	2.4	3.4	6.2	88.1			
240	2/18	12:8:18					6.9	3.5	2.4	2	1.8	1.9	2.3	3.1	5.4	30.3			
245	2/23	12:7:18				63.3	5.8	3.1	2.2	1.8	1.7	1.8	2.1	2.8	4.8	18.2			
250	2/28	12:6:6				22.6	4.9	2.8	2	1.7	1.6	1.7	2	2.6	4.3	12.9			
255	3/6	12:4:43				13.5	4.2	2.6	1.9	1.6	1.5	1.5	1.8	2.4	3.8	10			
260	3/11	12:3:13				9.5	3.7	2.3	1.7	1.5	1.4	1.4	1.7	2.2	3.5	8.1			
265	3/16	12:1:38				7.3	3.3	2.1	1.6	1.4	1.3	1.4	1.6	2.1	3.2	6.9			
270	3/21	12:0:0				5.9	2.9	2	1.5	1.3	1.2	1.3	1.5	2	2.9	5.9			
275	3/26	11:58:22			32.1	5	2.7	1.8	1.4	1.2	1.1	1.2	1.4	1.8	2.7	5.2	45.6		
280	3/31	11:56:47			16.1	4.3	2.4	1.7	1.3	1.1	1	1.1	1.3	1.7	2.5	4.7	22.8		
285	4/5	11:55:17			10.8	3.8	2.2	1.6	1.2	1	1	1	1.2	1.6	2.4	4.2	15.2		
290	4/10	11:53:54			8.2	3.4	2.1	1.5	1.1	1	0.9	1	1.2	1.5	2.2	3.8	11.4		
295	4/15	11:52:42			6.6	3	1.9	1.4	1.1	0.9	0.9	0.9	1.1	1.5	2.1	3.5	9.2		
300	4/20	11:51:42		88.6	5.6	2.8	1.8	1.3	1	0.8	0.8	0.9	1.1	1.4	2	3.3	7.7		
305	4/25	11:50:56		27.3	4.9	2.6	1.7	1.2	0.9	0.8	0.8	0.8	1	1.3	1.9	3	6.6		
310	4/30	11:50:25		16.6	4.4	2.4	1.6	1.2	0.9	0.7	0.7	0.8	1	1.3	1.8	2.8	5.8	—	
315	5/5	11:50:12		12.3	4	2.3	1.5	1.1	0.8	0.7	0.7	0.7	0.9	1.2	1.7	2.7	5.2	33.2	
320	5/10	11:50:17		10	3.7	2.2	1.5	1.1	0.8	0.7	0.6	0.7	0.9	1.2	1.7	2.5	4.7	20.1	
325	5/16	11:50:39		8.6	3.5	2.1	1.4	1	0.8	0.6	0.6	0.7	0.8	1.1	1.6	2.4	4.3	14.7	
330	5/21	11:51:20		7.7	3.3	2	1.4	1	0.8	0.6	0.6	0.6	0.8	1.1	1.5	2.3	4	11.7	
335	5/26	11:52:17		7.1	3.2	2	1.4	1	0.7	0.6	0.6	0.6	0.8	1.1	1.5	2.2	3.8	9.8	
340	5/31	11:53:29	—	6.7	3.1	1.9	1.3	1	0.7	0.6	0.5	0.6	0.8	1	1.4	2.1	3.6	8.6	
345	6/5	11:54:55	—	6.5	3.1	1.9	1.3	1	0.7	0.6	0.5	0.6	0.7	1	1.4	2.1	3.4	7.8	
350	6/10	11:56:30	85.6	6.4	3.1	1.9	1.3	1	0.7	0.6	0.5	0.6	0.7	1	1.4	2	3.3	7.2	
355	6/15	11:58:13	84.1	6.4	3.1	1.9	1.3	1	0.7	0.6	0.5	0.6	0.7	1	1.4	2	3.2	6.8	—

表中の「—」は，無効値を示す。
日出・日入は，太陽の仰角余角αが∠Rに近いときであり，
tan(α) が極端に大きくなる。

9.2.2 対応表作成コンピュータプログラム

```
";
  ( モジュール A を挿入 )


/* 表ヘッダ ************************************/

        print "

北緯 ".$a_degree." 度の場合

<table cellpadding=2><tr><td></td></tr></table>

<table border=1 cellspacing=0>
<tr>
<td rowspan=2 align=center nowrap> 公転 <br> 角度 </td>
<td rowspan=2 align=center bgcolor=\"#e3e3e3\"> 月日 </td>
<td rowspan=2 align=center\"> 南中 <br> の時刻 </td>
<td colspan=17 align=center> ○時の影の長さ ( 倍率 )</td>
</tr>
<tr>
<td align=center>4</td>
<td align=center>5</td>
<td align=center>6</td>
<td align=center>7</td>
<td align=center>8</td>
<td align=center>9</td>
<td align=center>10</td>
<td align=center>11</td>
<td align=center bgcolor=\"#ffb000\">12</td>
<td align=center>13</td>
<td align=center>14</td>
<td align=center>15</td>
<td align=center>16</td>
<td align=center>17</td>
<td align=center>18</td>
<td align=center>19</td>
<td align=center>20</td>
</tr>
        ";


/* 表生成ループ ************************************/

for( $i = $t_from_degree; $i < $t_to_degree; $i = $i + $t_u_degree ){

        /*******    レコード ( 表の 1 行分 ) 書き出し  ********************/

        if( ( $i % 90 ) == 0 ){
                print "
<tr bgcolor=\"#eedd00\">";
        }
        else {
                print "
<tr>";
        }
        print "
<td align=right>".$i."</td>
<td bgcolor=\"#e3e3e3\">".$date[$i]."</td>
<td>".$midsun_time[$i]."</td>";
```

```
		for( $k = 4; $k <= 20; $k++ ){

			$sunrise = $sunrise_rad[$i];
			$sunset = $sunset_rad[$i];
			$midday = $midday_rad[$i];
			$middayDEG = $midday_deg[$i];

			if( $midday > $sunset ){
				$sunset = $sunset + pi() * 2;
			}
			if( $sunrise > $midday ){
				$middayDEG = $middayDEG + 360;
				$sunset = $sunset + pi() * 2;
			}

			/* $k 時の経度 */
			$bK_deg = $middayDEG + 15 * ( $k - 12 );
			$bK_rad = deg2rad( $bK_deg );

			/* 日出から日入までの間か？ */
			if( ( $bK_rad > $sunrise ) && ( $bK_rad <$sunset ) ){

				$bK_c = cos( $bK_rad );
				$bK_s = sin( $bK_rad );

				$alphaK_c = $a_c * $tau_s[$i] * $bK_c
						- $n_c * $a_c * $tau_c[$i] * $bK_s + $n_s *
$a_s * $tau_c[$i];
				$alphaK = acos( $alphaK_c );

				$shadowK = round( tan( $alphaK ), 1 );
				if( $shadowK < 0 ){
					$shadowK = - $shadowK;
				}

				if( $k == 12 ){
					$bgcl = "ffb000";
				}
				else {
					$bgcl = "ffff66";
				}
				if( $shadowK < 100 ){
					print "
<td align=right bgcolor=\"#".$bgcl."\">".$shadowK."</td>";
				}
				else{
					print "
<td align=center bgcolor=\"#".$bgcl."\">―</td>";
				}
			}
			else {
				print "
<td bgcolor=\"#666699\">  </td>";
			}
		}

		print "
</tr>";
}

print "
</table>
";
```


9.3 <(公転角度, 緯度) ―南中太陽の高度･日影倍率> 対応表

9.3.1 対応表

公転角度		月/日		北緯〇度の南中太陽仰角余角・日影倍率							
				25	30	35	40	45	50	55	60
0		6/20		1.6 0.03	6.6 0.12	11.6 0.21	16.6 0.3	21.6 0.4	26.6 0.5	31.6 0.62	36.6 0.74
5	355	6/25	6/10	1.7 0.03	6.7 0.12	11.7 0.21	16.7 0.3	21.7 0.4	26.7 0.5	31.7 0.62	36.7 0.75
10	350	6/30	6/5	2 0.03	7 0.12	12 0.21	17 0.31	22 0.4	27 0.51	32 0.62	37 0.75
15	345	7/5	5/31	2.4 0.04	7.4 0.13	12.4 0.22	17.4 0.31	22.4 0.41	27.4 0.52	32.4 0.64	37.4 0.77
20	340	7/10	5/26	3.1 0.05	8.1 0.14	13.1 0.23	18.1 0.33	23.1 0.43	28.1 0.53	33.1 0.65	38.1 0.78
25	335	7/15	5/21	3.9 0.07	8.9 0.16	13.9 0.25	18.9 0.34	23.9 0.44	28.9 0.55	33.9 0.67	38.9 0.81
30	330	7/20	5/16	4.9 0.09	9.9 0.17	14.9 0.27	19.9 0.36	24.9 0.46	29.9 0.57	34.9 0.7	39.9 0.84
35	325	7/25	5/11	6 0.11	11 0.19	16 0.29	21 0.38	26 0.49	31 0.6	36 0.73	41 0.87
40	320	7/30	5/6	7.3 0.13	12.3 0.22	17.3 0.31	22.3 0.41	27.3 0.52	32.3 0.63	37.3 0.76	42.3 0.91
45	315	8/4	5/1	8.7 0.15	13.7 0.24	18.7 0.34	23.7 0.44	28.7 0.55	33.7 0.67	38.7 0.8	43.7 0.96
50	310	8/9	4/26	10.2 0.18	15.2 0.27	20.2 0.37	25.2 0.47	30.2 0.58	35.2 0.71	40.2 0.85	45.2 1.01
55	305	8/14	4/21	11.8 0.21	16.8 0.3	21.8 0.4	26.8 0.51	31.8 0.62	36.8 0.75	41.8 0.9	46.8 1.07
60	300	8/19	4/16	13.5 0.24	18.5 0.34	23.5 0.44	28.5 0.54	33.5 0.66	38.5 0.8	43.5 0.95	48.5 1.13
65	295	8/24	4/11	15.3 0.27	20.3 0.37	25.3 0.47	30.3 0.59	35.3 0.71	40.3 0.85	45.3 1.01	50.3 1.21
70	290	8/29	4/6	17.2 0.31	22.2 0.41	27.2 0.51	32.2 0.63	37.2 0.76	42.2 0.91	47.2 1.08	52.2 1.29
75	285	9/3	4/1	19.1 0.35	24.1 0.45	29.1 0.56	34.1 0.68	39.1 0.81	44.1 0.97	49.1 1.15	54.1 1.38
80	280	9/8	3/27	21 0.38	26 0.49	31 0.6	36 0.73	41 0.87	46 1.04	51 1.24	56 1.49
85	275	9/13	3/22	23 0.42	28 0.53	33 0.65	38 0.78	43 0.93	48 1.11	53 1.33	58 1.6
90	270	9/18	3/17	25 0.47	30 0.58	35 0.7	40 0.84	45 1	50 1.19	55 1.43	60 1.73

95	265	9/23	3/12	27 0.51	32 0.62	37 0.75	42 0.9	47 1.07	52 1.28	57 1.54	62 1.88
100	260	9/28	3/7	29 0.55	34 0.67	39 0.81	44 0.96	49 1.15	54 1.37	59 1.66	64 2.05
105	255	10/3	3/2	30.9 0.6	35.9 0.72	40.9 0.87	45.9 1.03	50.9 1.23	55.9 1.48	60.9 1.8	65.9 2.24
110	250	10/8	2/25	32.8 0.64	37.8 0.78	42.8 0.93	47.8 1.1	52.8 1.32	57.8 1.59	62.8 1.95	67.8 2.45
115	245	10/13	2/20	34.7 0.69	39.7 0.83	44.7 0.99	49.7 1.18	54.7 1.41	59.7 1.71	64.7 2.11	69.7 2.7
120	240	10/18	2/15	36.5 0.74	41.5 0.88	46.5 1.05	51.5 1.26	56.5 1.51	61.5 1.84	66.5 2.29	71.5 2.98
125	235	10/23	2/10	38.2 0.79	43.2 0.94	48.2 1.12	53.2 1.34	58.2 1.61	63.2 1.98	68.2 2.5	73.2 3.31
130	230	10/28	2/5	39.8 0.83	44.8 0.99	49.8 1.18	54.8 1.42	59.8 1.72	64.8 2.12	69.8 2.72	74.8 3.68
135	225	11/2	1/31	41.3 0.88	46.3 1.05	51.3 1.25	56.3 1.5	61.3 1.83	66.3 2.28	71.3 2.96	76.3 4.11
140	220	11/7	1/26	42.7 0.92	47.7 1.1	52.7 1.31	57.7 1.58	62.7 1.94	67.7 2.44	72.7 3.21	77.7 4.59
145	215	11/12	1/21	44 0.97	49 1.15	54 1.38	59 1.66	64 2.05	69 2.6	74 3.48	79 5.14
150	210	11/17	1/16	45.1 1	50.1 1.2	55.1 1.43	60.1 1.74	65.1 2.16	70.1 2.77	75.1 3.76	80.1 5.74
155	205	11/22	1/11	46.1 1.04	51.1 1.24	56.1 1.49	61.1 1.81	66.1 2.26	71.1 2.92	76.1 4.04	81.1 6.38
160	200	11/27	1/6	46.9 1.07	51.9 1.28	56.9 1.53	61.9 1.87	66.9 2.35	71.9 3.06	76.9 4.3	81.9 7.04
165	195	12/2	1/1	47.6 1.09	52.6 1.31	57.6 1.57	62.6 1.93	67.6 2.42	72.6 3.18	77.6 4.53	82.6 7.66
170	190	12/7	12/27	48 1.11	53 1.33	58 1.6	63 1.96	68 2.48	73 3.28	78 4.71	83 8.17
175	185	12/12	12/22	48.3 1.12	53.3 1.34	58.3 1.62	63.3 1.99	68.3 2.51	73.3 3.33	78.3 4.83	83.3 8.52
180		12/17		48.4 1.13	53.4 1.35	58.4 1.63	63.4 2	68.4 2.53	73.4 3.35	78.4 4.87	83.4 8.64

9.3.2　対応表作成コンピュータプログラム

```
";
  ( モジュール B を挿入 )


/* 表ヘッダ *************************************/

            print "
            ＜ ( 公転角度 / 月日 , 緯度 ) ―南中の太陽仰角余角 ( 度 )・日影倍率＞対照表

            <table border=1 cellspacing=0>
            <tr>
            <td rowspan=2 colspan=2 align=center> 公転角度 </td>
            <td rowspan=2 colspan=2 align=center> 月 / 日 </td>
            <td colspan=9 align=center> 北緯○度の南中太陽仰角余角・日影倍率 </td>
            </tr>
            <tr>";
            for( $j = $a_from_degree; $j <= $a_to_degree; $j = $j + $a_u_degree ){
                        print "
            <td align=center>".$j."</td>";
            }
            print "</tr>";


/* 表生成ループ *************************************/

for( $i = 0; $i <= 180; $i = $i + $t_u_degree ){

            if( ( $i % 90 ) == 0 ){
                        print "
<tr bgcolor=\"#eedd00\">";
            }
            else {
                        print "
<tr>";
            }

            if( $i == 0 || $i == 180 ){
                        print "
<td colspan=2 align=center>".$i."</td>
<td colspan=2 align=center>".$month[$i]."/".$day[$i]."</td>";
            }
            else {
                        print "
<td align=center>".$i."</td>
<td align=center>".( 360 - $i )."</td>
<td align=center>".$month[$i]."/".$day[$i]."</td>
<td align=center>".$month[ 360 - $i ]."/".$day[ 360 - $i ]."</td>";
            }
            for( $j = $a_from_degree; $j <= $a_to_degree; $j = $j + $a_u_degree ){
                        print "
<td align=right>    ".$alpha_deg[$i][$j]."<br>".$r[$i][$j]."</td>";
            }
            print "
</tr>
            ";
}

print "
</table>
";
```

10.　日時計

10.1　日時計の限界

日時計は，公転角度・緯度に依存する。
同緯度でも，影の向きと時刻の対応が，日に応じて変化する。

☞ ＜時刻―日影の向き＞対応表

日時計は，実用で考えるものではない。

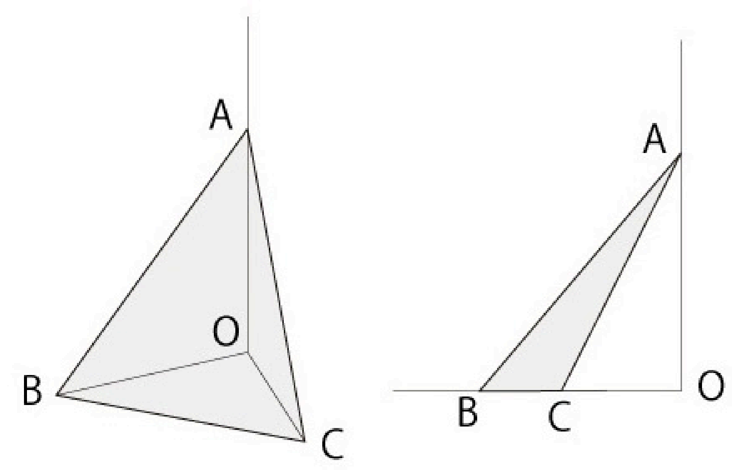
特に，太陽が高い場所・時節にはまったく適さない。

緯度30度の夏至の場合

時	南中との経度差	南中時の影との角度
6	-90	NAN
7	-75	NAN
8	-60	-176
9	-45	-130
10	-30	-106
11	-15	-78
12	0	0
13	15	78
14	30	106
15	45	130
16	60	176
17	75	NAN
18	90	NAN

1. 太陽が高いときは太陽のわずかな移動で影が大きく移動する。

   地平面に垂直に立てた軸に，三角形の板 (頂点をA, B, C とする) を図のようにもたせかける：



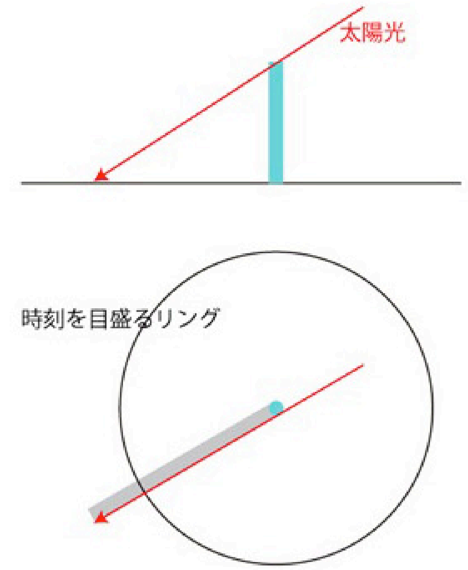
   Aを垂直軸につけたまま上下して，∠BOC の大きさの変化を観る。
   Aを下げると，∠BOC は ∠A の大きさに近づき，O に至って ∠A になる。
   Aを上げると，∠BOC は 2∠R に近づき，三角形の背の高さの点に至って 2∠R になる。

   このしくみにより，太陽が高いときは太陽のわずかな移動で影が大きく移動する。

2. 表中の「NAN (not a number)」は，計算不能を示す。
   実際，∠BOC を ∠A から求める計算式は，∠BAO, ∠CAO それぞれの sin を掛けたものが除数になる。
   この除数は，∠BOC が 2∠R に近づくとき，０に近づく。
   除数が０に近づくと，コンピュータの計算は破綻して，「NAN」を返すことになる。

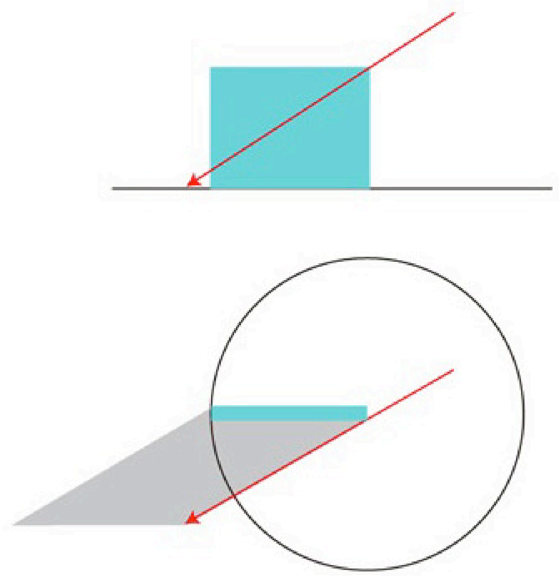
10.2　日時計の形の理

日時計の基本デザインは，＜棒を立てる＞である。
棒の影の向きで時刻を示す。

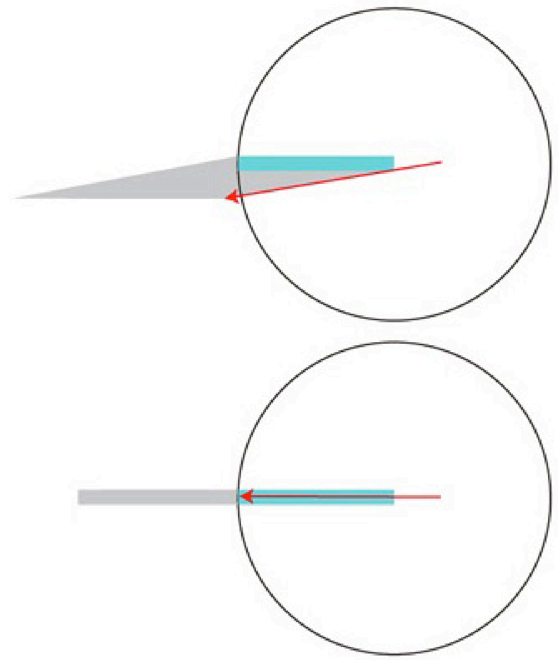


しかし棒は太さがあって，影が曖昧になる。
だからといって棒を細くしたら，影がはっきりしなくなるし，強度も問題になる。

というわけで，物の縁（へり）を使う。
板を立て，影の境界で時刻を示すのである。

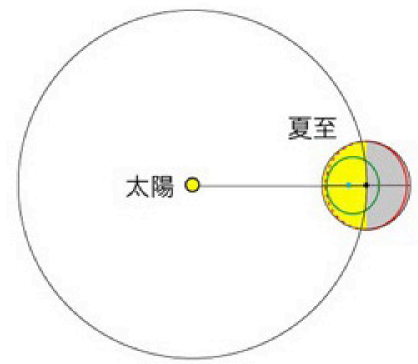


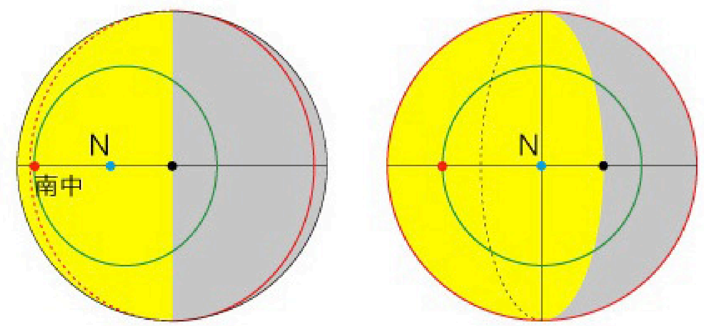
つぎに，板の高さが問題になる。
影が時刻目盛りリングに届くことが，必要である。
そこで，年間最短の影がリングに届くように，高さを決める。
且つ，ぎりぎりの高さを求める——日時計はコンパクトにしたい。

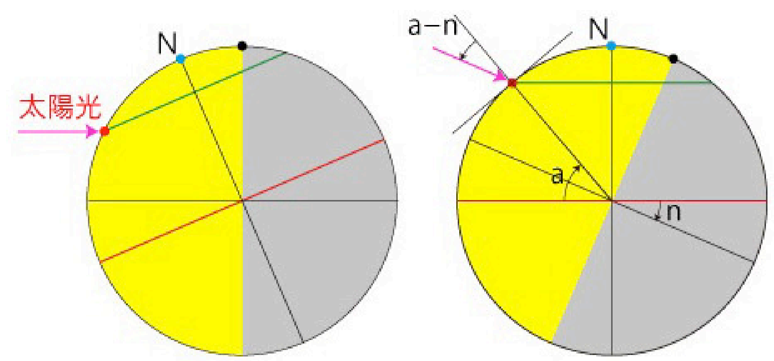


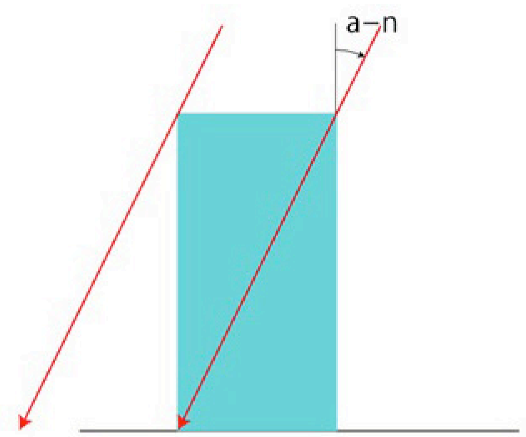
年間最短の影は夏至の南中時の影である。
そしてこのときの板の高さに対する影の長さの比は：

地軸の傾き (公転面の法線と地軸のなす角度) を n，緯度を a とするとき，
tan(a − n)。



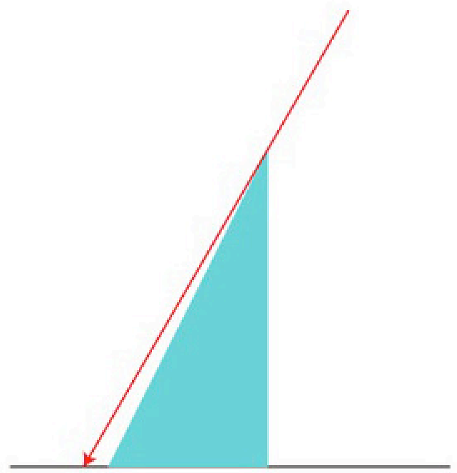


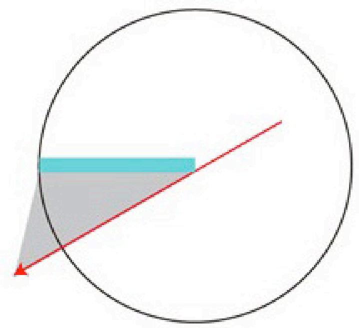




よって，板の高さは，時刻リングの半径の tan(π/2−(a − n)) 倍。

板の高さが決まったので，続いて，板の<体裁>をどうするか。
考え方は，「形をシンプルに保ちつつ，要らない部分を除く」。
こうして，つぎの形に落ち着く：





「*日時計はなんでこんな形なのか？*」の疑問が，これで解けた。

残るは，文字リングに時刻目盛を書く作業。
しかし実は，時刻目盛りは定まらない。
同時刻の影の向きが，年間で変化するのである。
変化は，夏至と冬至が極になる。
よって，時刻目盛りは，夏至と冬至の間をとって──例えば，秋分/春分の影の向きで──つくることになる。

☞ <時刻─日影の向き>対応表

10.3　標準時仕様

日時計作成コンピュータプログラムからは，つぎの表が出力される：

影の移動 (公転角度90度, 緯度50度の場合)

時	南中との経度差	南中時の影との角度
7	-75	-78
8	-60	-66
9	-45	-53
10	-30	-37
11	-15	-19
12	0	0
13	15	19
14	30	37
15	45	53
16	60	66
17	75	78

ここで時刻は，当地の時刻である。
標準時を用いるときは，標準時とのズレ t ──標準時子午線の東に当地が位置するときは正値，西に位置するときは負値(註)──を引いて標準時に改める：

時	南中との経度差	南中時の影との角度
7－t	-75	-78
8－t	-60	-66
9－t	-45	-53
10－t	-30	-37
11－t	-15	-19
12－t	0	0
13－t	15	19
14－t	30	37
15－t	45	53
16－t	60	66
17－t	75	78

註：当地時をT，このときの標準時を T_0 とする。
当地と同緯度の標準時地は t 後に，太陽に関する当地のいまの位相になる。
よって，

$$T_0 + t = T$$

$$\Rightarrow T_0 = T - t$$

10.4　年時計・日時計の運用

- 準備
  - 緯度・経度を知る
  - 「対照表」を作成する
  - 北方向を指す<直線>を地面に設定する
    - 南中時刻を計算する
      経度 ＝ 標準時の経度 ＋θ(度) のとき，
      南中時刻 ＝ 標準時正午の $\theta \div 15$ 時間前
    - 南中時刻に，地面に垂直の棒を立てる
      この棒の影が，北方向を指す<直線>になる

- 実測――対照表の使用で必要となるデータを取る

- 対照表で，月日・時刻を求める

註：本論考は，つぎのサイトで継続される (これの進行に応じて本書を適宜更新する)：

http://m-ac.jp/science/earth/revolution/daytime/

宮 下 英 明 (みやした ひであき)

1949 年，北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て北海道教育大学教育学部教授 (数学教育専門)，2015 年退職。

図説：「年と日」の数理

――日出・日入の年間変化，１日の太陽の動き，等々――

2020-12-06　アップロード (サーバー：m-ac.jp)
2021-08-21　「0. 導入」「1. 理論」の一部を更新
2021-10-31　「応用」の一部を更新

著者・サーバ運営者　宮下英明
サーバ　m-ac.jp

http://m-ac.jp/
m@m-ac.jp